Suites et séries de fonctions

Propriétés de la limite d'une suite de fonctions

Exercice 1 [00868] [Correction]
Etablir que la limite simple d'une suite de fonctions de I vers $\mathbb{R}$ convexes est convexe.

Exercice 2 [00885] [Correction]
Soient (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction f et g une fonction uniformément continue.
Montrer que la suite de fonctions $(g \circ f_n)$ converge uniformément.

Exercice 3 [00884] [Correction]
Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément vers des fonctions f et g supposées bornées.
Montrer que la suite de fonctions $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg.

Exercice 4 [00886] [Correction]
Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est elle-même une fonction uniformément continue.

Exercice 5 [00878] [Correction]
Soit (f_n) une suite de fonctions réelles continues et définies sur $[a,b]$. On suppose que f_n converge uniformément vers une fonction f.
Montrer

$$\inf_{[a,b]} f_n \to \inf_{[a,b]} f$$

Exercice 6 [00879] [Correction]
On suppose qu'une suite de fonctions (f_n) de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ converge uniformément vers $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et on considère une suite (x_n) d'éléments de $[a,b]$ convergeant vers x. Montrer

$$f_n(x_n) \to f(x)$$

Exercice 7 [00894] [Correction]
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f.
a) Justifier qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout n supérieur ou égal à N, on ait pour tout réel x, $|P_n(x) - P_N(x)| \leqslant 1$.
Que peut-on en déduire quant au degré des fonctions polynômes $P_n - P_N$ lorsque $n \geqslant N$?
b) Conclure que f est nécessairement une fonction polynomiale.

Exercice 8 [03461] [Correction]
Soit (P_n) une suite de fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite converge uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction f est polynomiale.

Etude pratique de la convergence d'une suite de fonctions

Exercice 9 [00871] [Correction]
On pose

$$u_n(x) = x^n \ln x \text{ avec } x \in \left]0,1\right] \text{ et } u_n(0) = 0$$

Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (u_n) sur $[0,1]$.

Exercice 10 [00872] [Correction]
Etudier la convergence uniforme de $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$$

Exercice 11 [00870] [Correction]
On pose

$$u_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} \sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}^+$$

a) Etudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0,+\infty[$.
b) Etudier la convergence uniforme sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.
c) Etudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$.

Exercice 12 [00873] [Correction]
On pose
$$f_n(x) = nx^2\mathrm{e}^{-nx} \text{ avec } x \in \mathbb{R}^+$$
Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 13 [00874] [Correction]
On pose
$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$
Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$ puis sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 14 [00875] [Correction]
On pose
$$f_n(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \text{ pour } x > 0 \text{ et } f_n(0) = 0$$
Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[-a, a]$ avec $a > 0$.

Exercice 15 [02527] [Correction]
Etudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (f_n) donnée par
$$f_n(x) = \sin^n(x)\cos(x)$$

Exercice 16 [02518] [Correction]
Etudier la suite de fonctions (f_n) définie par
$$f_n(x) = \frac{nx^2\mathrm{e}^{-nx}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$$

Exercice 17 [02830] [Correction]
On pose, pour $x \geqslant 0$,
$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}}$$
Etudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$.

Exercice 18 [00876] [Correction]
On pose
$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1+n2^n x^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$
Sur quels intervalles y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 19 [00877] [Correction]
On pose
$$f_n(x) = 4^n(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}) \text{ pour } x \in [0, 1]$$
Sur quels intervalles y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 20 [00881] [Correction]
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$$
a) Etudier la limite simple de la suite (f_n).
b) Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 21 [02972] [Correction]
Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par
$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0, n[\text{ et } f_n(x) = 0 \text{ si } x \geqslant n$$
Etudier le mode de convergence de (f_n).

Exercice 22 [00890] [Correction]
Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$$
a) Etudier la limite simple de (f_n) et montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) \geqslant \lim f_n(x)$$
b) En partant de l'encadrement suivant valable pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,
$$t - \frac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$$
justifier que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[0, a]$ (avec $a > 0$).
c) Etablir qu'en fait, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 23 [00892] [Correction]
Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^2 x(1-nx) \text{ si } x \in [0,1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

a) Etudier la limite simple de la suite (f_n).
b) Calculer

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?
c) Etudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ avec $a > 0$.

Exercice 24 [00891] [Correction]
Pour $x \in [0,\pi/2]$, on pose $f_n(x) = n \sin x \cos^n x$.
a) Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n).
b) Calculer

$$I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)\mathrm{d}x$$

La suite (f_n) converge-t-elle uniformément ?
c) Justifier qu'il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans $]0,\pi/2]$.

Exercice 25 [02532] [Correction]
a) Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = x(1+n^\alpha \mathrm{e}^{-nx})$ définies sur $\mathbb{R}^+$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.
b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme.
c) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x(1+\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx})\mathrm{d}x$$

Exercice 26 [02860] [Correction]
Soit (f_n) la suite de fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_0(x) = x \text{ et } f_{n+1}(x) = \frac{x}{2+f_n(x)} \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 27 [02831] [Correction]
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ donnée par

$$f(x) = 2x(1-x)$$

Etudier la convergence de (f_n) où f_n est l'itéré n-ième de f.

Exercice 28 [02970] [Correction]
On note E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ continues.
On pose

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t$$

pour toute $f \in E$.
On pose $f_0 = 1$ puis $f_{n+1} = \Phi(f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
a) Etudier la suite (f_n).
b) Soit $f = \lim(f_n)$.
Trouvez une équation différentielle dont f est solution.
Y a-t-il unicité de la solution nulle en 0 ?

Etude théorique de la convergence d'une suite de fonctions

Exercice 29 [00883] [Correction]
Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x + 1/n$$

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément mais pas (f_n^2).

Exercice 30 [00869] [Correction]
Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$$

Montrer que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 31 [00887] [Correction]
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable de dérivée seconde bornée.
Montrer que la suite des fonctions

$$g_n : x\mapsto n\left(f(x+1/n)-f(x)\right)$$

converge uniformément vers f'.

Exercice 32 [00888] [Correction]
Soit $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ décroissante et continue telle que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
Montrer que cette convergence est uniforme.

Exercice 33 [00889] [Correction]
[Théorème de Dini]
Soient des fonctions $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues telles que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
On suppose que pour tout $x\in[a,b]$, la suite réelle $(f_n(x))$ est décroissante. On désire montrer que la convergence de la suite (f_n) est uniforme.
a) Justifier l'existence de

$$\lim_{n\to+\infty}\|f_n\|_\infty$$

b) Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $x_n\in[a,b]$ tel que $\|f_n\|_\infty=f_n(x_n)$.
c) En observant que pour tout $p\leqslant n$,

$$f_n(x_n)\leqslant f_p(x_n)$$

montrer que $\|f_n\|_\infty\to 0$ et conclure.

Exercice 34 [02969] [Correction]
Soit I un intervalle ouvert ; soit pour $n\in\mathbb{N}$, $f_n:I\to\mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose que (f_n) converge simplement.
Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I.

Exercice 35 [02833] [Correction]
On note U l'ensemble des complexes de module 1 et on considère ω un complexe de module $\neq 1$.
Exprimer une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction

$$z\mapsto\frac{1}{z-\omega}$$

soit limite uniforme sur U d'une suite de fonctions polynomiales.

Exercice 36 [03902] [Correction]
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on pose

$$u_n(t)=n\left(f\left(t+1/n\right)-f(t)\right)$$

Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers une fonction à préciser.

Fonction solution d'équations fonctionnelles

Exercice 37 [00893] [Correction]
On définit (u_n) suite de fonctions de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ par

$$u_0(x)=1\text{ et }\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}(x)=1+\int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que pour tout $x\in[0,1]$,

$$0\leqslant u_{n+1}(x)-u_n(x)\leqslant\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

b) En déduire la convergence pour tout $x\in[0,1]$ de la suite $(u_n(x))$.
c) Etablir que la suite (u_n) converge uniformément vers une fonction u non nulle vérifiant

$$u'(x)=u(x-x^2)$$

Exercice 38 [03891] [Correction]
Soit $\gamma\in[0,1[$. On définit (u_n) suite de fonctions de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ par

$$u_0(x)=1\text{ et }\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}(x)=1+\int_0^x u_n(\gamma t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$,

$$0\leqslant u_{n+1}(x)-u_n(x)\leqslant\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

b) En déduire la convergence pour tout $x\in\mathbb{R}^+$ de la suite $(u_n(x))$.
c) Etablir que la suite de fonctions (u_n) converge vers une fonction u non nulle vérifiant

$$u'(x)=u(\gamma x)$$

Exercice 39 [00903] [Correction]
Pour $x > 0$, on pose
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$
a) Justifier que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
b) Préciser le sens de variation de S.
c) Etablir
$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x$$
d) Donner un équivalent de S en 0.
e) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 40 [03777] [Correction]
Pour $x > 0$, on pose
$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$
a) Montrer que F est bien définie.
b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$, de classe $\mathcal{C}^\infty$.
c) Simplifier
$$F(x) + F(x+1)$$
d) Montrer que pour $x > 0$
$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$
e) Donner un équivalent de F en 0 et en $+\infty$.

Exercice 41 [00913] [Correction]
Pour $x > 0$, on pose
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)}$$
a) Justifier que S est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
b) Former une relation liant $S(x)$ et $S(x+1)$.
c) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$ et en 0.

Exercice 42 [00914] [Correction]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose
$$f_n(x) = \mathrm{th}(x+n) - \mathrm{th}n$$
a) Etablir la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.
b) Justifier que la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
c) Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, S(x+1) - S(x) = 1 - \mathrm{th}x$$
d) Etudier la convergence de S en $+\infty$.

Exercice 43 [03754] [Correction]
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue décroissante et intégrable.
Montrer l'existence d'une fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue vérifiant
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x+1) - g(x) = f(x)$$

Exercice 44 [00912] [Correction]
On rappelle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$$
et on pose pour $x > 0$,
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$
a) Justifier que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
b) Préciser le sens de variation de S.
c) Etablir que
$$xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{\mathrm{e}}$$
d) Donner un équivalent de S en $+\infty$.
e) Donner un équivalent de S en 0.

Exercice 45 [00898] [Correction]
Justifier l'existence de

$$f(x)=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}$$

pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
Montrer que f est 1-périodique et qu'on a

$$f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=2f(x)$$

pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

Exercice 46 [02974] [Correction]
a) Etudier la convergence de la série de fonctions

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-n)^2}$$

pour $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
b) Soit un réel $c>2$. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x réel,

$$f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=cf(x)$$

Montrer que $f=0$.
c) Montrer que pour tout x réel non entier,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-n)^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2\pi x}$$

Exercice 47 [02973] [Correction]
Trouver les fonctions $f\in\mathcal{C}\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ telles que

$$\forall x\in[0,1]\,,\ f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(x^n)}{2^n}$$

Exercice 48 [03978] [Correction]
a) Montrer qu'il existe une unique fonction $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ de limite nulle en $+\infty$ et vérifiant

$$\forall x>0, f(x)+f(x+1)=\frac{1}{x^2}$$

b) Montrer que f est continue et intégrable sur $[1,+\infty[$.
c) Calculer

$$\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 49 [04104] [Correction]
On étudie l'équation fonctionnelle

$$(E):f(2x)=2f(x)-2f(x)^2$$

a) Quelles sont les solutions constantes sur $\mathbb{R}$?
b) Soit $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. On pose $f(x)=xh(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. À quelle condition sur h, la fonction f est-elle solution de (E) ?
c) On définit par récurrence une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant :
$h_0:x\mapsto 1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$h_{n+1}(x)=h_n\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}\left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

Pour $x\in[0,1]$, soit $T_x:y\mapsto y-xy^2/2$. Montrer que T_x est 1-lipschitzienne sur $[0,1]$ et que $T_x\left([0,1]\right)\subset[0,1]$.
Montrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.
d) Montrer que l'équation (E) admet une solution continue et non constante sur $[0,1]$.
e) Montrer que l'équation (E) admet une solution continue et non constante sur $\mathbb{R}^+$.

Etude de la convergence d'une série de fonctions

Exercice 50 [00895] [Correction]
Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n(x)=\frac{1}{n^2+x^2}\text{ avec }n\geqslant 1\text{ et }x\in\mathbb{R}$$

Exercice 51 [00896] [Correction]
Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2} \text{ avec } n \geqslant 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

Exercice 52 [00897] [Correction]
On note 1_I la fonction caractéristique d'un intervalle I :

$$1_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Etudier la convergence simple, uniforme et normale sur $[0,+\infty[$ de la série des fonctions

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1} 1_{[n,n+1[}(x)$$

Exercice 53 [03770] [Correction]
On considère la série des fonctions

$$f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

définies sur $\mathbb{R}^+$.
Etudier sa convergence simple, sa convergence normale et sa convergence uniforme.

Exercice 54 [03785] [Correction]
On introduit l'application sur $[0,+\infty[$

$$f_n : x \mapsto \frac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}$$

a) Etudier les convergences de la suite de fonctions (f_n).
b) Etudier les convergences de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exercice 55 [02838] [Correction]
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et si $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n : x \in [0,1] \mapsto n^\alpha x^n (1-x) \in \mathbb{R}$$

Etudier le mode convergence de la suite de fonctions (u_n), puis de la série de fonctions $\sum u_n$.

Exercice 56 [00882] [Correction]
Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x^n f(x)$$

a) Former une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la suite de fonction (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
b) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ si, et seulement si, $f(1) = 0$ et f dérivable en 1 avec $f'(1) = 0$.

Exercice 57 [03295] [Correction]
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = a_n x^n (1-x) \text{ avec } x \in [0,1]$$

a) Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.
b) Montrer que cette série converge normalement si, et seulement si, il y a convergence de la série $\sum a_n/n$.
c) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément si, et seulement si, $a_n \to 0$.

Exercice 58 [02839] [Correction]
On pose

$$u_0(x) = 1 \text{ et } u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$$

pour tout réel $x \in [0,1]$ et tout entier naturel n.
Montrer que la série de terme général u_n est normalement convergente.

Exercice 59 [03988] [Correction]
Soit $u_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{x}{(1+n^2x)^2}$ avec $n \in \mathbb{N}$.
Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de $\sum u_n$ et $\sum u_n'$.

Fonctions zêta

Exercice 60 [00907] [Correction]
On pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

a) Montrer que la fonction ζ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.
b) Etudier monotonie et convexité de la fonction ζ.
c) Déterminer la limite de la fonction ζ en $+\infty$.
d) Déterminer un équivalent de la fonction ζ en 1^+.
e) En exploitant l'inégalité de Cauchy-Schwarz établir que $x \mapsto \ln(\zeta(x))$ est convexe.

Exercice 61 [02834] [Correction]
Si $x > 1$, on pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

a) Quelle est la limite de $\zeta(x)$ quand $x \to +\infty$?
b) Pour quels réels x la série $\sum \frac{\zeta(n)}{n} x^n$ converge-t-elle ?
c) Si

$$F(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{n} x^n$$

montrer que F est continue sur $[-1,1[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.
d) Donner une expression plus simple de $F(x)$

Exercice 62 [00908] [Correction]
On pose

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Montrer que la fonction ζ_2 est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 63 [00909] [Correction]
On pose

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Montrer que ζ_2 est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 64 [03853] [Correction]
Déterminer la limite quand $x \to 0^+$ de

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$$

Exercice 65 [00899] [Correction]
Soient

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \text{ et } \zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

a) Déterminer les domaines de définition des fonctions ζ et ζ_2.
b) Justifier que les fonctions ζ et ζ_2 sont continues.
c) Etablir la relation $\zeta_2(x) = (1-2^{1-x})\zeta(x)$ pour tout $x > 1$.

Intégration de la somme d'une série de fonctions

Exercice 66 [00900] [Correction]
Soit

$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right)$$

Justifier et calculer

$$\int_0^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 67 [00911] [Correction]
On pose

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \text{ pour } x \in\,]0,1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

a) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

b) Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $[0,1]$.
c) En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

Exercice 68 [00920] [Correction]
On donne

$$\forall \alpha \in [0,1], \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2} = \pi\frac{\text{ch}\pi\alpha}{\text{sh}\pi\alpha} - \frac{1}{\alpha}$$

(prolongée par continuité en 0).
En intégrant sur $[0,1]$, en déduire la valeur de

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

Limite et comportement asymptotique de la somme de série de fonctions

Exercice 69 [02558] [Correction]
Ensemble de définition et continuité de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

En trouver la limite en $+\infty$ et un équivalent en 0^+ .

Exercice 70 [00139] [Correction]
Pour $t > 0$, on pose

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nt+1}$$

Déterminer la limite de $S(t)$ quand $t \to 0^+$.

Exercice 71 [00910] [Correction]
Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1+\frac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$$

a) Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$.
b) Déterminer la limite de sa somme en $+\infty$. On pourra exploiter la formule de Stirling

Exercice 72 [00917] [Correction]
Déterminer la limite de

$$u_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n$$

Exercice 73 [00918] [Correction]
Montrer que pour tout $\alpha > 0$,

$$\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\mathrm{e}^\alpha}{\mathrm{e}^\alpha - 1}$$

On pourra exploiter le théorème d' interversion limite/somme infinie.

Exercice 74 [00919] [Correction]
Par une interversion série-limite, montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\left(1+\frac{z}{p}\right)^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \exp(z)$$

Etude pratique de fonctions somme de série

Exercice 75 [00901] [Correction]
Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$$

a) Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
b) Montrer que S est continue.
c) Etudier la monotonie de S.
d) Déterminer la limite en $+\infty$ de S puis un équivalent de S en $+\infty$.
e) Déterminer un équivalent à S en 0.

Exercice 76 [00902] [Correction]
Sur $I =]-1,+\infty[$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

a) Montrer que S est définie et continue sur I.
b) Etudier la monotonie de S.
c) Calculer

$$S(x+1)-S(x)$$

d) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en -1^+.
e) Etablir

$$\forall n\in\mathbb{N}, S(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

f) En déduire un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

Exercice 77 [00906] [Correction]
Soit

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

a) Quel est le domaine de définition de f ?
Etudier la continuité de f sur celui-ci.
b) Montrer que f est strictement décroissante.
c) Etudier la limite de f en $+\infty$.
d) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand $x\to 0^+$.

Exercice 78 [00915] [Correction]
Pour $x\geqslant 0$, on pose

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

a) Pour quelles valeurs de x dans $\mathbb{R}^+$, $S(x)$ est définie ?
b) Former une relation entre $S(x)$ et $S(1/x)$ pour $x\neq 0$.
c) Etudier la continuité de S sur $[0,1[$ puis sur $]1,+\infty[$.
d) Dresser le tableau de variation de S.

Exercice 79 [02837] [Correction]
On pose

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$$

Etudier le domaine de définition, la continuité, la dérivabilité de S. Donner un équivalent de S en 0 et en 1^-.

Exercice 80 [03203] [Correction]
Définition, continuité et dérivabilité de

$$S:x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(1+n^2x^2)}$$

Exercice 81 [02529] [Correction]
Montrer que

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\arctan(nx)$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$.

Exercice 82 [03427] [Correction]
Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}^+$, on pose

$$u_n(x)=\arctan\sqrt{n+x}-\arctan\sqrt{n}$$

a) Etudier l'existence et la continuité de la fonction S définie sur $\mathbb{R}^+$ par la relation

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$$

b) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 83 [03797] [Correction]
On étudie

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$$

a) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
b) Donner, à l'aide d'une comparaison intégrale, un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.
c) Donner un développement limité à l'ordre 2 de f en 0. On donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\text{ et }\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

Exercice 84 [03194] [Correction]
Définition, continuité et classe $\mathcal{C}^1$ de

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

Exercice 85 [00904] [Correction]
Pour $t > 0$, on pose

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nt}$$

a) Justifier que S est définie et continue sur $]0,+\infty[$.
b) Etudier la limite de S en $+\infty$.
c) Etablir que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 86 [03644] [Correction]
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x}{n+x^2}$$

a) Montrer que la fonction S est bien définie et étudier sa parité.
b) Montrer que la fonction S est continue.
c) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 87 [00916] [Correction]
Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$ on pose

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n}$$

a) Justifier que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
b) Etablir que pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) + f(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

c) Etablir que f est continue sur $]-1,1[$ puis que f est continue sur $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$.
d) Etablir la continuité de f en 1.

Exercice 88 [02835] [Correction]
Si $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, soit

$$f_n(x) = \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n} (x+k)}$$

a) Montrer l'existence de $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
b) Montrer

$$\ln \Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$$

c) Montrer que Γ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 89 [00905] [Correction]
On fixe $\alpha > 0$ et on pose

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^\alpha x} \text{ et } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

a) Domaine de définition de f ?
b) Continuité de f ?
c) Etudier $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 90 [02836] [Correction]
Soit α un réel. Pour tout entier $n > 0$ et tout réel x, on pose

$$u_n(x) = \frac{n^\alpha x\,\mathrm{e}^{-nx}}{n^2+1}$$

On note I le domaine de définition de

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

a) Déterminer I.
b) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
c) A-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}^+$?
d) On suppose $\alpha \geqslant 2$. Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$$

ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
La convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ est-elle uniforme sur I ?
e) Etudier la continuité de S sur I.

Exercice 91 [02971] [Correction]
Soit des suites réelles (a_n) et (x_n) avec $a_n > 0$ pour tout n.
On suppose que la série de terme général $a_n\,(1 + |x_n|)$ converge.
On pose

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,|x - x_n|$$

Etudier la continuité et la dérivabilité de f.

Exercice 92 [04070] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$u_n(x) = \arctan{(n + x)} - \arctan{(n)}$$

a) Etudier l'existence et la continuité de la fonction S définie sur $\mathbb{R}^+$ par la relation

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

b) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Supposons que la suite (f_n) converge simplement vers f sur I avec chaque f_n convexe.
Pour tout $a, b \in I$ e $\lambda \in [0,1]$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f_n(a) + (1-\lambda) f_n(b)$$

A la limite quand $n \to +\infty$, on obtient

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

ce qui fournit la convexité de f.

Exercice 2 : [énoncé]
Par uniforme continuité, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon$$

Pour n assez grand, on a

$$\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha$$

et donc

$$\forall x \in I, |g(f_n(x)) - g(f(x))| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, il y a convergence uniforme de $(g \circ f_n)$ vers $g \circ f$.

Exercice 3 : [énoncé]
On peut écrire

$$\|f_n g_n - fg\|_\infty \leqslant \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty$$

Or $\|f_n\|_\infty \to \|f\|_\infty$ et donc la suite $(\|f_n\|_\infty)$ est bornée car convergente. Par opération sur les limites, on obtient alors

$$\|f_n g_n - fg\|_\infty \leqslant \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty \to 0$$

car $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ et $\|g_n - g\|_\infty \to 0$.

Exercice 4 : [énoncé]
Soit (f_n) une suite de fonctions uniformément continue de I vers $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers $f : I \to \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
La fonction f_n étant uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall x, y \in I, |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \varepsilon$$

Or

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

donc

$$\forall x, y \in I, |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant 3\varepsilon$$

Ainsi f est uniformément continue.

Exercice 5 : [énoncé]
Posons

$$m_n = \inf_{t \in [a,b]} f_n(t)$$

Puisque la fonction f_n est continue sur le segment $[a,b]$, cet infimum est une valeur prise par f_n et donc il existe $t_n \in [a,b]$ tel que

$$m_n = f_n(t_n)$$

Montrons que $m_n \to m$ avec

$$m = \inf_{t \in [a,b]} f$$

La fonction f est continue car limite uniforme d'une suite de fonctions continues et donc il existe $t_\infty \in [a,b]$ pour lequel

$$m = f(t_\infty)$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a pour n assez grand,

$$\|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

et donc

$$m_n = f_n(t_n) \geqslant f(t_n) - \varepsilon \geqslant m - \varepsilon$$

et

$$m = f(t_\infty) \geqslant f_n(t_\infty) - \varepsilon \geqslant m_n - \varepsilon$$

Ainsi

$$|m_n - m| \leqslant \varepsilon$$

On peut alors affirmer $m_n \to m$.

Exercice 6 : [énoncé]
On a
$$|f_n(x_n) - f(x)| \leqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$$
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant n_1, \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \varepsilon$$
et il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant n_2,\ |f(x_n) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$
car $f(x_n) \to f(x)$ en vertu de la continuité de f.
Pour $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on a
$$\forall n \geqslant n_0,\ |f_n(x_n) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon$$

Exercice 7 : [énoncé]
a) Pour $\varepsilon = 1/2$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N, \|P_n - f\|_\infty \leqslant 1/2$$
et donc $\|P_n - P_N\|_\infty \leqslant 1$.
Seules les fonctions polynomiales constantes sont bornées sur $\mathbb{R}$ donc $P_n - P_N$ est une fonction polynomiale constante. Posons λ_n la valeur de celle-ci.
b) On a
$$\lambda_n = P_n(0) - P_N(0) \to f(0) - P_N(0) = \lambda_\infty$$
et donc $(P_n) = (P_N + P_n - P_N)$ converge simplement vers $P_N + \lambda_\infty$. Par unicité de limite $f = P_N + \lambda_\infty$ est une fonction polynomiale.

Exercice 8 : [énoncé]
Pour $\varepsilon = 1$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N, P_n - f \text{ est bornée et } \|P_n - f\|_\infty \leqslant 1$$
Pour tout $n \geqslant N$, on peut alors affirmer que le polynôme
$P_n - P_N = (P_n - f) - (P_N - f)$ est borné et donc constant. Puisque la suite (P_n) converge uniformément vers f, la suite $(P_n - P_N)_{n\geqslant N}$ converge uniformément vers $f - P_N$. Or cette suite étant formée de fonctions constantes, sa convergence équivaut à la convergence de la suite de ces constantes. En posant C la limite de cette suite, on obtient
$$f = P_N + C$$
et donc f est une fonction polynôme.

Exercice 9 : [énoncé]
Les fonctions u_n sont continues sur $[0,1]$ pour $n \geqslant 1$ et dérivables sur $]0,1]$ avec
$$u_n'(x) = x^{n-1}(1 + n\ln x)$$
Le tableau de variation de u_n donne
$$\sup_{[0,1]} |u_n| = -u_n(\mathrm{e}^{-1/n}) = \frac{1}{ne} \to 0$$
La suite de fonctions converge donc uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

Exercice 10 : [énoncé]
Pour $x \in [0, +\infty[$, $f_n(x) \to 0$ car $|f_n(x)| \leqslant \frac{x}{n}$.
On a
$$f_n'(x) = \frac{n(1+x^n) - n^2x^n}{n^2(1+x^n)^2} = \frac{1 + (1-n)x^n}{n(1+x^n)^2}$$
Posons $x_n = \sqrt[n]{1/(n-1)}$.

x	0		x_n		$+\infty$
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	M_n	$\searrow$	0

donc
$$\|f_n\|_\infty = M_n = f_n(x_n) = \frac{\sqrt[n]{1/(n-1)}}{n(1 + \frac{1}{n-1})} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(n-1)}}{\frac{n^2}{n-1}} \to 0$$
Il y a donc convergence uniforme vers la fonction nulle.

Exercice 11 : [énoncé]
a) Soit $x \in [0, +\infty[$.
Si $x = 0$ alors $u_n(x) = 0 \to 0$.
Si $x > 0$ alors $u_n(x) \to 0$ car $\mathrm{e}^{-nx} \to 0$.
La suite de fonctions (u_n) converge donc simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.
b) On a
$$\sup_{x\in[a,+\infty[} |u_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-na} \to 0$$
donc il y a convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
c) Puisque
$$\|u_n\|_\infty \geqslant u_n(\pi/2n) = \mathrm{e}^{-\pi/2} \not\to 0$$
il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 12 : [énoncé]
$f_n'(x) = nx(2-nx)\mathrm{e}^{-nx}$, le tableau de variation de f_n donne

$$\sup_{\mathbb{R}^+} |f_n| = f_n(2/n) = \frac{4}{n}\mathrm{e}^{-2} \to 0$$

donc il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ et donc a fortiori sur $[a, +\infty[$.

Exercice 13 : [énoncé]
$f_n(0) \to 1$ et $f_n(x) \to 0$ pour $x \neq 0$. La fonction limite n'étant pas continue, il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. En revanche si $|x| \geqslant |a|$ alors

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{(1+a^2)^n} \to 0$$

donc il y a convergence uniforme sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 14 : [énoncé]
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \to 0$: il y a convergence simple vers la fonction nulle.
$f_n(n) = n^2 \sin(1/n^2) \to 1$, il n'y a donc pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
Sur $[-a, a]$,

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{x^2}{n\,|x|} = \frac{|x|}{n} \leqslant \frac{a}{n} \to 0$$

via $|\sin t| \leqslant |t|$. Par suite il y a convergence uniforme sur $[-a, a]$.

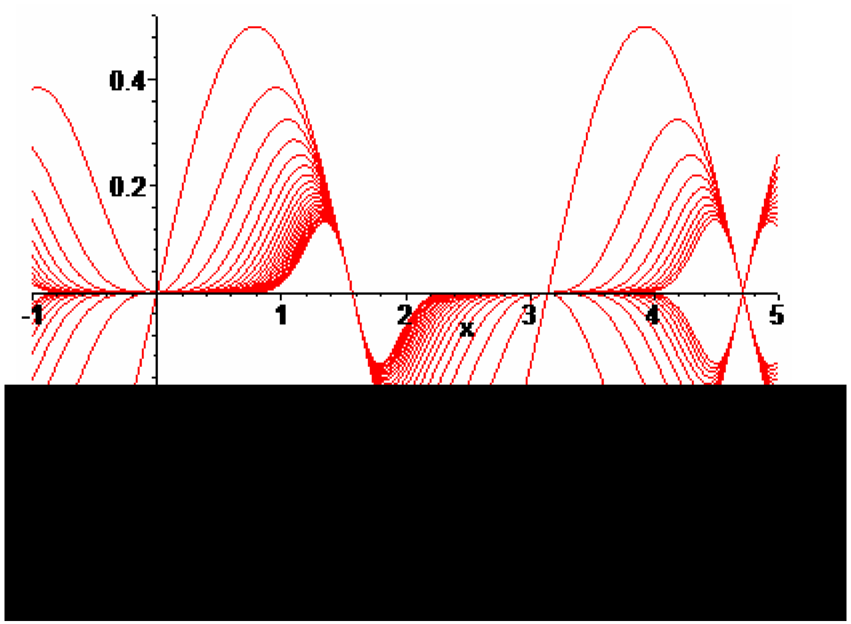
Exercice 15 : [énoncé]
Pour $x \neq \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$ on a $|\sin x| < 1$ et donc $f_n(x) \to 0$.
Pour $x = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$, $\cos x = 0$ et donc $f_n(x) = 0 \to 0$.
Ainsi (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
Par 2π périodicité et parité on ne poursuit l'étude qu'avec $x \in [0, \pi]$. La fonction f_n est dérivable avec

$$f_n'(x) = \sin^{n-1}(x)((n+1)\cos^2(x) - 1)$$

On peut dresser le tableau de variation de f_n sur $[0, \pi]$ et on obtient

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n| = \left|f_n\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right| = \left(1 - \frac{1}{(n+1)}\right)^{n/2}\frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$$

La suite de fonction (f_n) converge donc uniformément vers la fonction nulle.



Les premières fonctions de la suite (f_n)

Exercice 16 : [énoncé]
f_n est définie sur $\mathbb{R}^\star$ et peut être prolongée par continuité en 0 en posant sur $f_n(0) = n$.
Pour $x \leqslant 0$, $f_n(x) \to +\infty$.
Pour $x > 0$, $f_n(x) \to 0$.
Ainsi (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Il ne peut y avoir converge uniformément sur $\mathbb{R}^{+\star}$ car alors par le théorème de la double limite :

$$\lim_{x\to 0^+}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 0^+} f_n(x)$$

donne $0 = +\infty$.
Pour $a > 0$, sur $[a, +\infty[$,

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{nx^2\mathrm{e}^{-nx}}{1-\mathrm{e}^{-a^2}}$$

et par étude fonctionnelle $nx^2\mathrm{e}^{-nx} \leqslant \frac{4}{n}\mathrm{e}^2$ (maximum en $x = 2/n$) donc

$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{4\mathrm{e}^2}{n(1-\mathrm{e}^{-a^2})} \to 0$$

qui donne la converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Exercice 17 : [énoncé]
Quand $p \to +\infty$,

$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}} \to \frac{1}{1+x} = f(x)$$

On a

$$f(x) - f_p(x) = \frac{(1+x)^{1/p} - 1}{(1+x)^{1+1/p}}$$

Or, pour $\alpha \in]0,1]$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est concave ce qui permet d'affirmer

$$0 \leqslant (1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x$$

pour tout $x \geqslant 0$ et donc

$$|f(x) - f_p(x)| \leqslant \frac{1}{p}\frac{x}{(1+x)^{1+1/p}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{x}{1+x} \leqslant \frac{1}{p}$$

Puisque $\|f - f_p\|_{\infty,\mathbb{R}^+} \leqslant \frac{1}{p}$, la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 18 : [énoncé]
La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle et

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \left|f_n(\pm 1/\sqrt{n2^n})\right| = \frac{\sqrt{2^n}}{2\sqrt{n}} \to +\infty$$

il n'y a donc pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
Or $\pm 1/\sqrt{n2^n} \to 0$ et donc d'après le tableau de variation de f_n, pour tout $a > 0$, on a, pour n assez grand,

$$\sup_{x\geqslant a} |f_n(x)| = f_n(a) \to 0$$

Ainsi, il y a convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ et de même sur $]-\infty, a]$.
En revanche, il n'y aura pas convergence uniforme sur les intervalles non singuliers contenant 0.

Exercice 19 : [énoncé]
On a

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(1/\sqrt[2^n]{2}\right) = 4^{n-1} \to +\infty$$

il n'y a donc pas convergence uniforme sur $[0,1]$.
Or $1/\sqrt[2^n]{2} \to 1$ et donc d'après le tableau de variation de f_n, pour tout $a \in [0,1[$, on a, pour n assez grand,

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| = f_n(a) \to 0$$

Ainsi il y a convergence uniforme sur $[0,a]$. En revanche il n'y aura pas convergence uniforme sur les intervalles non singuliers contenant 1.

Exercice 20 : [énoncé]
a) Si $x = 0$ alors $f_n(x) = 0 \to 0$.
Si $x \in]0,1]$ alors $f_n(x) \to 0$ par comparaison des suites de référence.
b) $f_n'(x) = n^\alpha(1-x)^n - n^{\alpha+1}x(1-x)^{n-1} = n^\alpha(1-x)^{n-1}(1-(n+1)x)$.
Après étude des variations

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = n^\alpha \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

Or $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ et

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{1}{n+1})} = \mathrm{e}^{-1+o(1)} \to \mathrm{e}^{-1}$$

donc $\|f_n\|_\infty \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\mathrm{e}}$.
Il y a convergence uniforme si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Exercice 21 : [énoncé]
Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Pour n assez grand

$$f_n(x) = (1 - x/n)^n = \exp\left(n\ln(1-x/n)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-x}$$

La suite (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ avec $f_n \leqslant f$.
Etudions $\delta_n = f - f_n \geqslant 0$.
Pour $x \in [n, +\infty[$, $\delta_n(x) = \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-n}$.
Pour $x \in [0, n[$, $\delta_n(x) = \mathrm{e}^{-x} - (1-x/n)^n$ et $\delta_n'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (1-x/n)^{n-1}$.
Posons

$$\varphi_n(x) = (n-1)\ln\left(1 - x/n\right) + x$$

On a

$$\varphi_n'(x) = \frac{n-1}{n}\frac{1}{x/n - 1} + 1 = \frac{x-1}{x-n}$$

est du signe de $1-x$.
Par étude des variations de φ_n, on obtient l'existence de $x_n \in [0,n[$ tel que $\varphi_n(x) \geqslant 0$ pour $x \leqslant x_n$ et $\varphi_n(x) \leqslant 0$ pour $x \geqslant x_n$. On en déduit que pour $x \leqslant x_n$, $\delta_n'(x) \geqslant 0$ et pour $x \geqslant x_n$, $\delta_n'(x) \leqslant 0$. Ainsi

$$\|\delta_n\|_{\infty,[0,n[} = \delta_n(x_n) = \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = \frac{x_n}{n}\mathrm{e}^{-x_n}$$

Puisque la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est bornée par un certain M sur $\mathbb{R}^+$, on obtient

$$\|\delta_n\|_{\infty,[0,n[} \leqslant \frac{M}{n}$$

Finalement

$$\|\delta_n\|_{\infty,[0,+\infty[} \leqslant \max\left(\frac{M}{n}, \mathrm{e}^{-n}\right) \to 0$$

On peut donc affirmer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers f.

Exercice 22 : [énoncé]
a) $f_n(x) = \exp(-n\ln(1+\frac{x}{n})) = \exp(-x + o(1)) \to \mathrm{e}^{-x} = f(x)$.
On sait $\ln(1+t) \leqslant t$ donc par opérations : $f_n(x) \geqslant \mathrm{e}^{-x}$
b) On sait

$$t - \frac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$$

donc

$$\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} \leqslant \ln(1+\frac{x}{n}) \leqslant \frac{x}{n}$$

puis

$$\mathrm{e}^{-x} \leqslant f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x+\frac{x^2}{2n}} = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2n}}$$

Sur $[0,a]$ on a $\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2n}} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{a^2}{2n}} \to 1$.
Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\left|\mathrm{e}^{a^2/2n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$.
On a alors pour tout $x \in [0,a]$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{x^2/2n} - 1\right) \leqslant \mathrm{e}^{a^2/2n} - 1 \leqslant \varepsilon$$

Par suite $f_n \xrightarrow[{[0,a]}]{CU} f$.
c) Les fonctions f_n sont décroissantes donc

$$\forall x \geqslant a, f_n(x) \leqslant f_n(a)$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque $\mathrm{e}^{-a} \xrightarrow[a\to+\infty]{} 0$, il existe $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \geqslant a$,

$$\mathrm{e}^{-x} \leqslant \varepsilon/3$$

Puisque $f_n(a) \to \mathrm{e}^{-a}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \left|f_n(a) - \mathrm{e}^{-a}\right| \leqslant \varepsilon/3$$

Mais alors $\forall x \geqslant a$,

$$\left|f_n(x) - \mathrm{e}^{-x}\right| \leqslant f_n(x) + \mathrm{e}^{-x} \leqslant f_n(a) + \mathrm{e}^{-x} \leqslant \left(f_n(a) - \mathrm{e}^{-a}\right) + \mathrm{e}^{-a} + \mathrm{e}^{-x} \leqslant \varepsilon$$

De plus, $f_n \xrightarrow[{[0,a]}]{CU} f$ donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N', \forall x \in [0,a] \left|f_n(x) - \mathrm{e}^{-x}\right| \leqslant \varepsilon$$

Finalement

$$\forall n \geqslant \max(N,N'), \forall x \in \mathbb{R}^+, \left|f_n(x) - \mathrm{e}^{-x}\right| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}^+]{CU} f$.

Exercice 23 : [énoncé]
a) Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0$ et pour $x > 0$, on a aussi $f_n(x) = 0$ pour n assez grand.
Par suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
b) On a

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/n} n^2 t(1-nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 u(1-u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6}$$

Il n'y a pas convergence uniforme de la suite (f_n) puisque

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \not\to \int_0^1 0\,\mathrm{d}t$$

c) Pour n assez grand, $\sup\limits_{[a,1]}|f_n(x)| = 0$ donc (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a,1]$.

Exercice 24 : [énoncé]
a) Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0 \to 0$. Pour $x \in]0,\pi/2]$, $\cos x \in [0,1[$ donc $f_n(x) \to 0$.

b) Directement

$$I_n = \left[-\frac{n}{n+1}\cos^{n+1}x\right]_0^{\pi/2} = \frac{n}{n+1}$$

donc $I_n \to 1 \neq \int_0^{\pi/2} 0.\mathrm{d}x$ et il n'y a pas convergence uniforme.
c) On a

x	0		x_n		$\pi/2$
f_n	0	$\nearrow$	$f_n(x_n)$	$\searrow$	0

avec $x_n = \arccos\sqrt{\frac{n}{n+1}} \to 0$ et

$$f_n(x_n) = \frac{\sqrt{n}}{(1+1/n)^{(n+1)/2}} \sim \sqrt{\frac{n}{\mathrm{e}}} \to +\infty$$

Soit $[a,b] \subset \left]0,\pi/2\right]$. On a $a>0$ donc à partir d'un certain rang $x_n < a$ et alors $\sup_{[a,b]}|f_n| = f_n(a) \to 0$ donc il y a convergence uniforme sur $[a,b]$.

Exercice 25 : [énoncé]
II) a) En distinguant le cas $x=0$ du cas général, on obtient que la suite de fonction (f_n) converge simplement vers la fonction f donnée par $f(x)=x$.
b) Par étude des variations de $f_n(x)-f(x)$, on obtient qu'il y a convergence uniforme si, et seulement si, $\alpha<1$.
c) Par un argument de convergence uniforme, on peut échanger limite et intégrale

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x(1+\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx})\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

Exercice 26 : [énoncé]

Pour $x \geqslant 0$, la suite numérique $(f_n(x))$ est une suite homographique.
L'équation $r = \frac{x}{2+r}$ possède deux solutions $r_1 = \sqrt{1+x}-1$ et $r_2 = -\sqrt{1+x}-1$.
Posons

$$g_n(x) = \frac{f_n(x)-r_1}{f_n(x)-r_2}$$

On a

$$g_{n+1}(x) = \frac{\frac{x}{2+f_n(x)} - \frac{x}{2+r_1}}{\frac{x}{2+f_n(x)} - \frac{x}{2+r_2}} = \frac{f_n(x)-r_1}{f_n(x)-r_2}\frac{2+r_2}{2+r_1} = \rho g_n(x)$$

avec

$$\rho = \frac{2+r_2}{2+r_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

Puisque $|\rho|<1$, la suite géométrique $(g_n(x))$ converge vers 0.
Or après résolution de l'équation

$$g_n(x) = \frac{f_n(x)-r_1}{f_n(x)-r_2}$$

on obtient

$$f_n(x) = \frac{r_1 - g_n(x)r_2}{1-g_n(x)}$$

et on en déduit que la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers $r_1 = \sqrt{1+x}-1$.
Finalement, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f_\infty : x \mapsto \sqrt{1+x}-1$.
Puisque les fonctions f_n sont rationnelles de degrés alternativement 0 et 1, la fonction $|f_n - f_\infty|$ ne peut-être bornée sur $\mathbb{R}^+$ car de limite $+\infty$ en $+\infty$; il n'y a donc par convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
En revanche, on peut montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f_∞ sur $[0,a]$ pour tout $a \geqslant 0$.
En effet

$$f_n(x) - f_\infty(x) = \frac{g_n(x)}{1-g_n(x)}2\sqrt{1+x}$$

D'une part, la fonction $x \mapsto 2\sqrt{1+x}$ est bornée sur $[0,a]$.
D'autre part,

$$g_n(x) = \left[\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right]^n g_0(x)$$

Sur $[0,a]$, la fonction

$$x \mapsto \left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|$$

admet un maximum de valeur <1 et puisque la fonction continue g_0 est bornée sur $[0,a]$, on peut montrer que la suite de fonctions (g_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,a]$.
La relation

$$f_n(x) - f_\infty(x) = \frac{g_n(x)}{1-g_n(x)}2\sqrt{1+x}$$

permet alors d'établir que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f_∞ sur $[0,a]$.

Exercice 27 : [énoncé]
On remarque que la fonction f est bien définie et même qu'elle prend ses valeurs dans $[0,1/2]$ plutôt que $[0,1]$.

On remarque aussi que $f(1-x)=f(x)$. Pour étudier le comportement de la suite $(f_n(a))=(f^n(a))$, on peut se limiter au cas où $a\in[0,1/2]$.
Etudier le comportement de la suite des itérés $(f^n(a))$ équivaut à étudier la suite récurrente définie par

$$u_0=a \text{ et } u_{n+1}=f(u_n)$$

On observe

$$u_{n+1}-u_n=u_n(1-2u_n)\geqslant 0$$

La suite (u_n) est donc croissante.
Si $a=0$, cette suite est en fait constante.
Si $a>0$ cette suite converge vers une limite ℓ vérifiant $f(\ell)=\ell$. Après résolution de cette équation, on obtient que cette limite ne peut qu'être $1/2$.
On peut alors affirmer qu'il y a convergence simple de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction

$$f:x\mapsto\begin{cases}1/2 & \text{si } x\in\left]0,1\right[\\ 0 & \text{si } x=0 \text{ ou } 1\end{cases}$$

Par non continuité, il y a non convergence uniforme sur $[0,1]$.
En revanche la croissance de f sur $[0,1/2]$ permet d'assurer que

$$\forall a\in\left]0,1/2\right],\ \forall x\in[a,1/2],\ f_n(x)\geqslant f_n(a)$$

ce qui permet de justifier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $[a,1-a]$ pour tout $a\in\left]0,1/2\right]$.

Exercice 28 : [énoncé]
a) On vérifie sans peine que la suite (f_n) est bien définie.

$$f_1(x)=x,\ f_2(x)=\frac{2}{3}x^{3/2},\dots$$

Si $f(x)=\alpha x^\beta$ alors

$$\Phi(f)(x)=\sqrt{\alpha}\int_0^x t^{\beta/2}\,\mathrm{d}t=\frac{2\sqrt{\alpha}}{\beta+2}x^{\beta/2+1}$$

Ainsi $f_n(x)=\alpha_n x^{\beta_n}$ avec

$$\alpha_{n+1}=\frac{2\sqrt{\alpha_n}}{\beta_n+2} \text{ et } \beta_{n+1}=\frac{\beta_n}{2}+1$$

On a

$$\beta_n=\frac{2^n-1}{2^{n-1}}\to 2$$

et, pour $n\geqslant 1$,

$$\alpha_{n+1}=\frac{2\sqrt{\alpha_n}}{4-\frac{1}{2^{n-1}}}$$

On a

$$\alpha_{n+2}-\alpha_{n+1}=\frac{2\sqrt{\alpha_{n+1}}}{4-\frac{1}{2^n}}-\frac{2\sqrt{\alpha_n}}{4-\frac{1}{2^{n-1}}}$$

Or $2^n\geqslant 2^{n-1}$ donne

$$\frac{2}{4-\frac{1}{2^n}}\leqslant\frac{2}{4-\frac{1}{2^{n-1}}}$$

donc

$$\alpha_{n+2}-\alpha_{n+1}\leqslant\frac{2}{4-\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\sqrt{\alpha_{n+1}}-\sqrt{\alpha_n}\right)$$

Puisque $\alpha_1=\alpha_0$, on obtient alors par récurrence que la suite (α_n) est décroissante.
Etant aussi minorée par 0, elle converge et en passant la relation de récurrence à la limite, on obtient

$$\alpha_n\to 1/4$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$f:x\mapsto\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

De plus

$$f_n(x)-f(x)=\alpha_n\left(x^{\beta_n}-x^2\right)+\left(\alpha_n-\frac{1}{4}\right)x^2$$

Puisque $\beta_n\leqslant 2$, on a pour tout $x\in[0,1]$ et en exploitant $\mathrm{e}^u\leqslant 1+u$

$$0\leqslant x^{\beta_n}-x^2=x^2\left(\mathrm{e}^{(\beta_n-2)\ln x}-1\right)\leqslant(\beta_n-2)x^2\ln x$$

Puisque la fonction $x\mapsto x\ln x$ est minorée par $-1/\mathrm{e}$ sur $[0,1]$,

$$0\leqslant x^{\beta_n}-x^2=\frac{2-\beta_n}{\mathrm{e}}x\leqslant 2-\beta_n$$

et ainsi

$$|f_n(x)-f(x)|=\alpha_n(2-\beta_n)+\left(\alpha_n-\frac{1}{4}\right)$$

et ce majorant uniforme tend vers 0.
Il y a donc convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers f.

b) La relation

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{f_n(t)}\,\mathrm{d}t$$

donne à la limite

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t$$

d'où l'on tire f dérivable et $f'(x) = \sqrt{f(x)}$.
Pour l'équation différentielle $y' = \sqrt{y}$, il n'y a pas unicité de la solution nulle en 0, car outre la fonction nulle, la fonction $y : x \mapsto (x/2)^2$ est justement solution.

Exercice 29 : [énoncé]
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \to x$ et

$$|f_n(x) - x| = 1/n \to 0$$

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction identité.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)^2 \to x^2$ et

$$f_n(n)^2 - n^2 = 2 + 1/n^2 \to 2$$

Il n'y a pas convergence uniforme de la suite (f_n^2).

Exercice 30 : [énoncé]
Par opérations, les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ car $\sqrt{.}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
La suite (f_n) converge simplement vers f avec $f(x) = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0.
En multipliant par la quantité conjuguée :

$$f_n(x) - f(x) = \frac{1/n}{\sqrt{x^2 + 1/n} + \sqrt{x^2}}$$

Par suite $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1/n}{\sqrt{1/n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ puis $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.
Ainsi la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 31 : [énoncé]
Par la formule de Taylor Lagrange :

$$\left|f(x + \frac{1}{n}) - f(x) - \frac{1}{n}f'(x)\right| \leqslant \frac{M}{n^2}$$

avec $M = \sup |f''|$.
Par suite

$$|g_n(x) - f'(x)| \leqslant \frac{M}{n}$$

et donc

$$\|g_n(x) - f'(x)\|_{\infty,\mathbb{R}} \to 0$$

Exercice 32 : [énoncé]
On a

$$\forall x \in [0,1]\,, f_n(1) \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(0)$$

donc

$$\|f_n - 0\|_\infty = \max(f_n(0), -f_n(1)) \leqslant \max(|f_n(0)|\,, |f_n(1)|) \leqslant |f_n(0)| + |f_n(1)| \to 0$$

Exercice 33 : [énoncé]
a) f_n est positive car

$$f_n(x) \geqslant \lim_{p\to+\infty} f_p(x) = 0$$

Puisque $0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$, en passant à la borne supérieure, on obtient $\|f_{n+1}\|_\infty \leqslant \|f_n\|_\infty$.
La suite $\|f_n\|_\infty$ est décroissante et minorée donc convergente.
b) $|f_n| = f_n$ étant continue sur un segment, elle y admet un maximum en un certain x_n.
c) La propriété $f_n(x_n) \leqslant f_p(x_n)$ provient de la décroissance de la suite $(f_p(x_n))_{p\in\mathbb{N}}$.
La suite (x_n) étant bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ de limite $\overline{x}$.
Comme

$$f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \leqslant f_p(x_{\varphi(n)})$$

on a la limite quand $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty \leqslant f_p(\overline{x})$$

En passant cette relation à la limite quand $p \to +\infty$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty \leqslant 0$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = 0$$

Exercice 34 : [énoncé]
Notons f la limite simple de la suite (f_n). Cette fonction f est évidemment convexe.
Par l'absurde, supposons la convergence non uniforme sur un segment $[a,b]$ inclus dans I.
Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une suite (x_n) d'éléments de $[a,b]$ tels que
$|f_n(x_n) - f(x)| \geqslant 2\varepsilon$ pour tout naturel n.
Par compacité, on peut extraire de (x_n) une suite convergente et, quitte à supprimer certaines des fonctions f_n, on peut supposer que (x_n) converge. Posons x_∞ sa limite.
Soit $\alpha > 0$ tel que $[a-\alpha, b+\alpha] \subset I$ (ce qui est possible car l'intervalle I est ouvert).
Pour tout fonction convexe φ, la croissance des pentes donne :

$$\forall x \neq y \in [a,b]\,,\ \frac{\varphi(a) - \varphi(a-\alpha)}{\alpha} \leqslant \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} \leqslant \frac{\varphi(b+\alpha) - \varphi(b)}{\alpha}\ (\star)$$

Par convergence simple, $f_n(x_\infty) \to f(x_\infty)$.
Pour n assez grand, $|f_n(x_\infty) - f(x_\infty)| \leqslant \varepsilon$ donc

$$|f_n(x_n) - f_n(x_\infty) + f(x_\infty) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon$$

puis

$$\left|\frac{f_n(x_n) - f_n(x_\infty)}{x_n - x_\infty} + \frac{f(x_\infty) - f(x_n)}{x_\infty - x_n}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{x_\infty - x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Or la suite $\left(\frac{f(x_\infty)-f(x_n)}{x_\infty - x_n}\right)$ est bornée en vertu de $(\star)$ et la suite $\left(\frac{f_n(x_n)-f_n(x_\infty)}{x_n - x_\infty}\right)$ aussi puis

$$\frac{f_n(a) - f_n(a-\alpha)}{\alpha} \leqslant \frac{f_n(x_n) - f_n(x_\infty)}{x_n - x_\infty} \leqslant \frac{f_n(b+\alpha) - f_n(b)}{\alpha}$$

et les termes encadrant convergent.
On obtient ainsi une absurdité.

Exercice 35 : [énoncé]
Si $|\omega| > 1$ alors

$$\frac{1}{z-\omega} = -\frac{1}{\omega}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\omega^n}$$

et la convergence normale sur U de la série assure la convergence uniforme d'une suite de polynômes vers

$$z \mapsto \frac{1}{z-\omega}$$

Si $|\omega| < 1$, on peut remarquer que pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-ik\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta} - \omega}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-i(n+(k+1))\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$$

Si $z \mapsto P_n(z)$ est une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur U vers $z \mapsto \frac{1}{z-\omega}$ alors

$$\int_0^{2\pi} \overline{P_n(\mathrm{e}^{i\theta})}\frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta} - \omega}\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\left|\mathrm{e}^{i\theta} - \omega\right|^2} \neq 0$$

Or par le calcul précédent, on peut affirmer

$$\int_0^{2\pi} \overline{P_n(\mathrm{e}^{i\theta})}\frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta} - \omega}\,\mathrm{d}\theta = 0$$

On conclut à une absurdité.
La condition cherchée est $|\omega| > 1$.

Exercice 36 : [énoncé]
Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$u_n(t) = \frac{f(t+1/n) - f(t)}{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(t)$$

La suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers f' sur $\mathbb{R}$.
Soient $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. La fonction f' est continue sur le compact $[a,b+1]$ dont uniformément continue. Il existe alors $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall (s,t) \in [a,b+1]^2\,, |s-t| \leqslant \alpha \Rightarrow |f'(s) - f'(t)| \leqslant \varepsilon$$

Pour n assez grand de sorte que $1/n \leqslant \alpha$ et $t \in [a,b]$. On peut écrire

$$n\left(f(t+1/n) - f(t)\right) - f'(t) = n\int_t^{t+1/n} f'(s) - f'(t)\,\mathrm{d}s$$

et donc

$$|u_n(t) - f'(t)| \leqslant n\int_t^{t+1/n} |f'(s) - f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 37 : [énoncé]
a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$: $u_0(x) = 1$ et $u_1(x) = 1 + \int_0^x \mathrm{d}t = 1 + x$ donc $0 \leqslant u_1(x) - u_0(x) = x$.
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 0$.

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

or $u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2) \geqslant 0$ donc $u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \geqslant 0$ et

$$u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2) \leqslant \frac{(t - t^2)^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

puis

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leqslant \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

Récurrence établie.
b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait qu'il y a convergence de la série exponentielle

$$\sum \frac{x^n}{n!}$$

Par comparaison de série à termes positifs, il y a convergence de la série télescopique

$$\sum u_{n+1}(x) - u_n(x)$$

et donc convergence de la suite $(u_n(x))$.
c) Pour tout $x \in [0,1]$,

$$|u(x) - u_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k(x) - u_{k-1}(x))\right|$$

donc

$$|u(x) - u_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Ainsi (u_n) converge uniformément vers u. On en déduit que u est continue et, toujours par convergence uniforme

$$\forall x \in [0,1]\,,\ \int_0^x u_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^x u(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

Par conséquent

$$\forall x \in [0,1]\,,\ u(x) = 1 + \int_0^x u(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

La fonction est donc une fonction non nulle (car $u(0) = 1$) et dérivable avec

$$u'(x) = u(x - x^2)$$

Exercice 38 : [énoncé]
a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$: $u_0(x) = 1$ et $u_1(x) = 1 + \int_0^x \mathrm{d}t = 1 + x$ donc

$$0 \leqslant u_1(x) - u_0(x) = x$$

Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x u_{n+1}(\gamma t) - u_n(\gamma t)\,\mathrm{d}t$$

Par hypothèse de récurrence, on a pour tout $t \in [0,x]$

$$0 \leqslant u_{n+1}(\gamma t) - u_n(\gamma t) \leqslant \frac{(\gamma t)^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

puis en intégrant

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leqslant \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

Récurrence établie.
b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait qu'il y a convergence de la série exponentielle

$$\sum \frac{x^n}{n!}$$

Par comparaison de série à termes positifs, il y a convergence de la série télescopique

$$\sum u_{n+1}(x) - u_n(x)$$

et donc convergence de la suite $(u_n(x))$.
c) Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $x \in [0,a]$,

$$|u(x) - u_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k(x) - u_{k-1}(x))\right|$$

donc

$$|u(x) - u_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Ainsi (u_n) converge uniformément vers u sur $[0,a]$. On en déduit que u est continue et, toujours par convergence uniforme

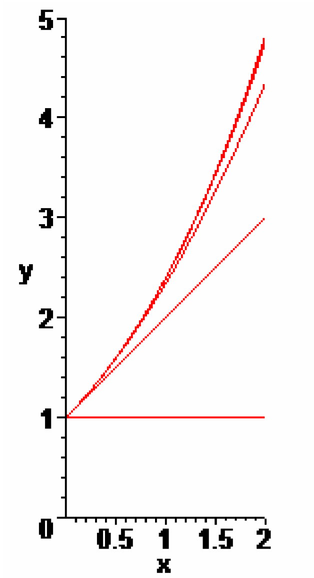
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x u_n(\gamma t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^x u(\gamma t)\,\mathrm{d}t$$

Par conséquent

$$\forall x \in [0,1]\,,\ u(x) = 1 + \int_0^x u(\gamma t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction est donc une fonction non nulle (car $u(0)=1$) et dérivable avec

$$u'(x) = u(\gamma x)$$



Les premiers éléments de la suite quand $\gamma = 2/3$

Exercice 39 : [énoncé]

a) Les fonctions $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Par le critère spécial des séries alternées, $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers S.

Soi $a>0$. Sur $[a,+\infty[$,

$$\|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{1}{(n+a)^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^2} < +\infty$$

donc $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment de $[a,+\infty[$.

Par théorème, S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$. Celle-ci est donc du signe de son premier terme $\frac{-1}{x^2}$. Ainsi $S'(x) \leqslant 0$ et la fonction S est décroissante.

c)

$$S(x+1)+S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x}$$

d) Quand $x \to 0$, $S(x) = \frac{1}{x} - S(x+1)$ et $S(x+1) \to S(1)$ donc

$$S(x) \sim \frac{1}{x}$$

e) Quand $x \to +\infty$,

$$\frac{1}{2}(S(x)+S(x+1)) \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{2}(S(x)+S(x-1))$$

avec $\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x-1}$ donne

$$S(x) \sim \frac{1}{2x}$$

Exercice 40 : [énoncé]

Posons $u_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$$

a) Par le critère spécial, $\sum u_n(x)$ converge pour chaque $x > 0$.
Il y a convergence simple de la série de fonctions définissant F.
b) Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et pour $n \geqslant 1$

$$u_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

On a

$$\|u_n'\|_\infty = \frac{1}{n^2}$$

Il y a convergence normale $\sum u_n'$ pour $n \geqslant 1$.
Il y a donc convergence uniforme de $\sum u_n'$ (pour $n \geqslant 0$) et l'on peut donc conclure que F est de classe $\mathcal{C}^1$.
De la même manière, on obtient F de classe $\mathcal{C}^\infty$.
c) Par décalage d'indice

$$F(x+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1+x} = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

et donc

$$F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x}$$

d) Posons

$$G(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

L'intégrale est bien définie pour $x > 0$ et l'on remarque

$$G(x) + G(x+1) = \frac{1}{x}$$

Posons $H = F - G$. La fonction H est 2-périodique, montrons qu'elle tend vers 0 en $+\infty$.
Par application du critère spécial, on a

$$\forall x > 0, F(x) \geqslant 0$$

donc

$$0 \leqslant F(x) \leqslant F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

et par encadrement F tend vers 0 en $+\infty$.
Le même raisonnement se transpose à G.
On peut conclure que H tend vers 0 en $+\infty$ puis finalement H est nulle.

e) Quand $x \to 0$, $F(x+1) \to F(1)$ par continuité et donc

$$F(x) = \frac{1}{x} - F(x+1) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$$

On vérifie aisément que F est décroissante et puisque

$$\frac{1}{x} = F(x) + F(x+1) \leqslant 2F(x) \leqslant F(x) + F(x-1) = \frac{1}{x-1}$$

on obtient

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$

Exercice 41 : [énoncé]

a) $f_n : x \mapsto \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)}$, f_n est continue sur $]0, +\infty[$.
Soit $a > 0$. Sur $[a, +\infty[$,

$$\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{a}\frac{1}{n!}$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ donc converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$. Par théorème, la somme S de la série $\sum f_n$ est continue sur $]0, +\infty[$.
b)

$$S(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{(x+k)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{(x+1+k)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}S(x+1)$$

c) Par converge uniformément sur $[a, +\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$$

Quand $x \to +\infty$,

$$S(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}S(x+1) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$$

Quand $x \to 0$,

$$S(x+1) \to S(1)$$

par continuité et

$$S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty}\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!} = \mathrm{e} - 1$$

donc
$$S(x)=\frac{1+S(x+1)}{x}\sim\frac{\mathrm{e}}{x}$$

Exercice 42 : [énoncé]
a) Par le théorème des accroissements finis, on peut écrire $f_n(x)=x(\mathrm{th})'(c)$ avec $c\in\,]n,x+n[$.Puisque $(\mathrm{th})'(c)=\frac{1}{\mathrm{ch}^2(c)}$, on a
$$|f_n(x)|\leqslant\frac{x}{\mathrm{ch}^2(n)}\sim\frac{4x}{\mathrm{e}^{2n}}$$
Par suite $n^2f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc $\sum f_n(x)$ est absolument convergente donc convergente. Ainsi $\sum f_n$ converge simplement.
b) Pour $a\in\mathbb{R}^+$, l'étude qui précède donne
$$\|f_n\|_{\infty,[0,a]}\leqslant\frac{a}{\mathrm{ch}^2(n)}$$
donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,a]$. Par convergence uniforme sur tout segment d'une série de fonction continue, on peut affirmer que S est continue. De plus, les fonctions sommées étant toutes strictement croissantes, la somme S l'est aussi.
En effet, pour $x<y$,
$$\sum_{k=1}^{n}f_k(x)<\sum_{k=1}^{n}f_k(y)$$
donne à la limite
$$\sum_{k=1}^{+\infty}f_k(x)\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}f_k(y)$$
et puisque $f_0(x)<f_0(y)$, on parvient à
$$S(x)<S(y)$$
c)
$$S(x+1)=\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{th}(x+1+n)-\mathrm{th}(n))=\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{th}(x+1+n)-\mathrm{th}(n+1))+\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{th}(n+1)-\mathrm{th}n)$$
avec convergence des deux séries introduites.
Par décalage d'indice
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{th}(x+1+n)-\mathrm{th}(n+1))=S(x)-\mathrm{th}x$$
et par étude la limite des sommes partielles
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{th}(n+1)-\mathrm{th}n)=1$$
On conclut à la relation proposée.
d) S admet une limite en $+\infty$ car c'est une fonction monotone. Pour déterminer celle-ci, étudions la limite de la suite $(S(n))$. La nature de la suite $S(n)$ est celle de la série de terme général
$$S(n+1)-S(n)=1-\mathrm{th}n$$
Or
$$1-\mathrm{th}n=\frac{\mathrm{ch}n-\mathrm{sh}n}{\mathrm{ch}n}=\frac{\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{ch}n}\sim\frac{1}{2\mathrm{e}^{-2n}}$$
est terme général d'une série absolument convergente.
On en déduit que la suite $(S(n))$ converge et donc que la fonction S converge.

Exercice 43 : [énoncé]
Puisque la fonction f est décroissante, elle admet une limite en $+\infty$. Puisque la fonction f est aussi intégrable cette limite est nécessairement nulle. En particulier, la fonction f est positive.
Par télescopage, on observe
$$g(x+N)-g(x)=\sum_{k=0}^{N-1}f(x+k)$$
et s'il l'on s'adjoint la contrainte d'une limite nulle à g en $+\infty$, on est tenté de poser
$$g(x)=-\sum_{k=0}^{+\infty}f(x+k)$$
Il reste à montrer que cette fonction est bien définie et continue ce qui sera obtenu par un argument de convergence normale. Soit $x\in\mathbb{R}^+$. On a pour $k\geqslant 1$
$$0\leqslant f(x+k)\leqslant f(k)\leqslant\int_{k-1}^{k}f(t)\,\mathrm{d}t$$
donc
$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f(x+k)|\leqslant\int_{k-1}^{k}f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par intégrabilité de f, il y a convergence de la série

$$\sum \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc convergence normale de la série de fonctions

$$\sum_{k\geqslant 1} f(x+k)$$

L'adjonction du terme d'indice $k=0$ ne change rien et l'on peut conclure.
On vient ainsi de trouver une solution au problème posé, d'autres solutions s'en déduisent par ajout d'une constante.

Exercice 44 : [énoncé]
a) $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n)^2}$$

$\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers S.

$$\forall a>0,\ \|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} = \frac{1}{n!(n+a)^2} \text{ et } \sum \frac{1}{n!(n+a)^2} \text{ converge}$$

donc $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$. Par théorème S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série de somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+x)^2}$$

Celle-ci est donc du signe de son premier terme $\frac{-1}{x^2}$. Ainsi $S'(x)\leqslant 0$ et S est décroissante.
c)

$$xS(x)-S(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(x+n)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!(x+n)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

d)

$$xS(x) = \frac{1}{\mathrm{e}} + S(x+1) \text{ et } S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Quand $x\to 0^+$, $xS(x)\to 1$ d'où

$$S(x) \sim \frac{1}{x}$$

e) Par le critère spécial des séries alternées,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(x+k)}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!(x+1+n)} \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$$

donc

$$\|R_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \to 0$$

Par converge uniformément sur $]0,+\infty[$,

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$$

Quand $x\to+\infty$,

$$xS(x) = \frac{1}{\mathrm{e}} + S(x+1) \to \frac{1}{\mathrm{e}}$$

d'où

$$S(x) \sim \frac{1}{\mathrm{e}x}$$

Exercice 45 : [énoncé]
On a

$$\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où l'existence de la somme.

$$f(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{x+k}$$

Or

$$\sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{x+1+k} = \sum_{k=-N+1}^{N+1} \frac{1}{x+k}$$

donc à la limite quand $N\to+\infty$, on obtient $f(x+1)=f(x)$.

$$\sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{\frac{x}{2}+k} + \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{\frac{x+1}{2}+k} = 2\sum_{k=-2N+1}^{2N+1} \frac{1}{x+k}$$

donne à la limite

$$f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=2f(x)$$

Exercice 46 : [énoncé]
a) La série de fonctions considérée converge uniformément sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Sa somme est donc continue et de plus 1-périodique.
b) Soit $\alpha \geqslant 1$. Pour tout $x \in [-\alpha,\alpha]$, $x/2$ et $(x+1)/2$ appartiennent à $[-\alpha,\alpha]$.
Posons $M_\alpha = \|f\|_{\infty,[-\alpha,\alpha]}$. La relation

$$f(x)=\frac{1}{c}\left[f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]$$

donne $|f(x)| \leqslant \frac{2}{c}M_\alpha$ pour tout $x\in[-\alpha,\alpha]$. On en déduit $M_\alpha \leqslant \frac{2}{c}M_\alpha$ puis $M_\alpha = 0$ puisque $c>2$.
Ainsi f est nulle sur $[-\alpha,\alpha]$ et puisque ceci vaut pour tout $\alpha \geqslant 1$, f est la fonction nulle.
c) Posons $h : x \mapsto \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
La fonction $g = f - h$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, 1-périodique et continue.
On peut écrire $f(x) = \frac{1}{x^2} + \tilde{f}(x)$ avec

$$\tilde{f}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(x-n)^2}+\frac{1}{(x+n)^2}\right)$$

Par convergence uniforme sur $[-1/2,1/2]$, la fonction $\tilde{f}$ est continue en 0.
On peut aussi écrire $h(x) = \frac{1}{x^2} + \tilde{h}(x)$ avec $\tilde{h}$ continue en 0.
La fonction $g = f - h$ se prolonge donc par continuité en 0.
Par périodicité, g se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, on remarque que

$$f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=4f(x)$$

et

$$h\left(\frac{x}{2}\right)+h\left(\frac{x+1}{2}\right)=4h(x)$$

On en déduit

$$g\left(\frac{x}{2}\right)+g\left(\frac{x+1}{2}\right)=4g(x)$$

pour $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ mais aussi pour $x\in\mathbb{Z}$ par continuité.
En vertu de b), on peut affirmer $g=0$ et donc $f=h$.

Exercice 47 : [énoncé]
Les fonctions constantes sont solutions et les solutions forment un sous-espace vectoriel.
Soit f une solution. Quitte à ajouter une fonction constante, on peut supposer $f(0)=0$.
On a

$$f(x)=\frac{f(x)}{2}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{f(x^n)}{2^n}$$

donc

$$f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{f(x^n)}{2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(x^{n+1})}{2^n}$$

Posons $h(x)=\sup\limits_{[0,x]}|f|$.
Pour $x>0$, on a $x^{n+1}\in\left[0,x^2\right]$ pour tout $n\geqslant 1$. On en déduit

$$|f(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}h(x^2)=h(x^2)$$

Ainsi $h(x)\leqslant h(x^2)$ puis en itérant $0\leqslant h(x)\leqslant h(x^{2^n})$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Or pour $x\in[0,1[$, $x^{2^n}\to 0$ et $\lim\limits_{0^+}h=0$ (car $f(0)=0$) donc $h(x)=0$ sur $[0,1[$.
Finalement f est nulle sur $[0,1[$ puis en 1 par continuité.

Exercice 48 : [énoncé]
a) Analyse : supposons f solution.
Pour $x>0$, on a

$$f(x)=\frac{1}{x^2}-f(x+1)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}+f(x+2)$$

puis par récurrence

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}+(-1)^{n+1}f(x+n+1)$$

Sachant que f est de limite nulle en $+\infty$, on obtient

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^2}$$

Synthèse : on vérifie aisément la convergence de la série de fonctions définissant f par application du critère spécial.
De plus

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{x^2}$$

assure que f est de limite nulle à l'infini.
Enfin

$$f(x)+f(x+1)=\frac{1}{x^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n+1)^2}=\frac{1}{x^2}$$

b) On vérifie la convergence normale de la série de fonctions définie f sur $[a,+\infty[$ par

$$\left|\frac{(-1)^n}{(x+n)^2}\right|\leqslant\frac{1}{(a+n)^2}$$

Les fonctions sommées étant continues, la fonction f est continue sur $]0,+\infty[$.
Elle est aussi intégrable en vertu de l'encadrement

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{x^2}$$

c) On ne peut directement appliquer de théorèmes d'intégration terme à terme, on raisonne alors par les sommes partielles

$$\int_1^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(t+n)^2}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+n)^2}=\sum_{n=1}^{N+1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Or

$$\left|\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_1^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(t+n)^2}\,\mathrm{d}t\right|=\left|\int_1^{+\infty}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(t+n)^2}\,\mathrm{d}t\right|$$

et par application du critère spécial

$$\left|\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_1^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(t+n)^2}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+N+1)^2}=\frac{1}{(N+2)}$$

En passant à la limite quand $N\to+\infty$, on obtient

$$\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$$

Exercice 49 : [énoncé]
a) Si f est constante égale à C alors l'équation (E) est vérifiée si, et seulement si, $C=2C-2C^2$. Cette dernière équation est vérifiée pour $C=0$ et $C=1/2$ seulement.
b) Après substitution et étude séparée du cas $x=0$, on obtient f solution de (E) si, et seulement si, h vérifie

$$h(2x)=h(x)-xh(x)^2$$

c) L'application T_x est de classe $\mathcal{C}^1$ et $T_x'(y)=1-xy$. Sur $[0,1]$, on vérifie $|T_x'(y)|\leqslant 1$ et la fonction T_x est donc 1-lipschitzienne sur $[0,1]$. Au surplus, la fonction T_x est croissante sur $[0,1]$ avec $T_x(0)=0$ et $T_x(1)=1-x/2$. On en déduit $T_x([0,1])\subset[0,1]$.
Par une récurrence immédiate, on vérifie

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in[0,1]\,,h_n(x)\in[0,1]$$

Pour $n\geqslant 1$ et $x\in[0,1]$, on a par lipschitzianité

$$|h_{n+1}(x)-h_n(x)|\leqslant\left|h_n\left(\frac{x}{2}\right)-h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

En répétant cette majoration

$$|h_{n+1}(x)-h_n(x)|\leqslant\left|h_1\left(\frac{x}{2^n}\right)-h_0\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|=\frac{x}{2^{n+1}}\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}$$

La série télescopique $\sum h_{n+1}(x)-h_n(x)$ converge donc absolument et la suite $(h_n(x))$ est donc convergente. La suite de fonctions (h_n) converge donc simplement vers une fonction h. Au surplus

$$|h(x)-h_n(x)|=\left|\sum_{k=n}^{+\infty}h_{k+1}(x)-h_k(x)\right|\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

La convergence de la suite (h_n) est donc uniforme sur $[0,1]$.
d) La fonction h est limite uniforme d'une suite de fonctions continues, elle est donc continue sur $[0,1]$. En passant à la limite la relation

$$\forall x\in[0,1]\,,h_{n+1}(x)=h_n\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}h_n\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

on obtient l'identité

$$\forall x\in[0,1]\,,h(x)=h\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}h\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Puisque $h_n(0)=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $h(0)=1$ et la fonction h n'est pas nulle.
On peut alors définir la fonction $f : x\mapsto xh(x)$ qui est continue, non constante et vérifie

$$\forall x\in[0,1]\,,f(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)-2f\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

e) On peut ensuite définir une solution sur $[0,2]$ en posant

$$\forall x\in\left]1,2\right]\,,f(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)-2f\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Cette solution est bien continue en 1 car

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=2f\left(\frac{1}{2}\right)-2f\left(\frac{1}{2}\right)^2=f(1)$$

De même, on prolonge la solution sur $[0,4]$, $[0,8]$, etc.

Exercice 50 : [énoncé]
On a

$$\forall x\in\mathbb{R},|f_n(x)|\leqslant 1/n^2$$

Puisque $\sum 1/n^2$ converge, il y a convergence normale, donc uniforme, donc simple sur $\mathbb{R}$.

Exercice 51 : [énoncé]
On a $\|f_n\|_\infty=1/n$ or $\sum 1/n$ diverge donc il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}$.
Pour $x\in\mathbb{R}$, la série numérique $\sum f_n(x)$ satisfait le critère de Leibniz, il y a donc convergence simple sur $\mathbb{R}$ et

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}f_n(x)\right|\leqslant\frac{1}{N+1+x^2}\leqslant\frac{1}{N+1}$$

donc $\|R_N\|_\infty\leqslant\frac{1}{N+1}\to0$. Il y a donc convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exercice 52 : [énoncé]
Pour tout $x\in[0,+\infty[$, introduisons$k=\lfloor x\rfloor$. Pour $N\geqslant k+1$, on a

$$\sum_{n=0}^N u_n(x)=\frac{1}{k+1}$$

et donc la série de fonctions converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers S avec

$$S(x)=\frac{1}{k+1}\text{ pour }x\in[k,k+1[$$

Pour tout $x\in[0,+\infty[$, on a

$$S(x)-\sum_{n=0}^N u_n(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<n+1\\ S(x) & \text{si } x\geqslant n+1\end{cases}$$

et donc

$$\left|S(x)-\sum_{n=0}^N u_n(x)\right|\leqslant\frac{1}{N+2}\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$$

Il y a donc convergence uniforme sur $[0,+\infty[$.
Enfin $\|u_n\|_\infty=1/(n+1)$ n'est pas sommable, il n'y a pas convergence normale.

Exercice 53 : [énoncé]
Pour $x=0$, $f_n(x)=0$ est sommable.
Pour $x\neq0$, $n^2f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ par croissance comparée et donc la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.
On peut donc affirmer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
L'étude des variations des fonctions f_n donne

$$\|f_n\|_\infty=f_n\left(2/\sqrt{n}\right)=\frac{4}{\mathrm{e}^2}$$

Il n'y a donc pas convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
En revanche, pour $a>0$ et n assez grand de sorte que $2/\sqrt{n}\leqslant a$, on a

$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}=f_n(a)$$

et donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ car la série numérique $\sum f_n(a)$ converge.
A fortiori, il y a aussi convergence uniforme de $\sum f_n$ sur chaque $[a,+\infty[$ avec $a>0$.
Montrons qu'il n'y a cependant pas convergence uniforme sur $[0,+\infty[$.
Par l'absurde, s'il y avait convergence uniforme sur $[0,+\infty[$, la fonction somme de la série $\sum f_n$ serait continue car chaque f_n est continue. Soit $N\in\mathbb{N}^\star$. Par positivité des fonctions sommées

$$\sum_{n=0}^{+\infty}f_n\left(\frac{2}{\sqrt{N}}\right)\geqslant f_N\left(\frac{2}{\sqrt{N}}\right)=\frac{4}{\mathrm{e}^2}$$

et donc la fonction somme ne tend par vers 0 en 0.
Ceci contredit sa continuité.

Exercice 54 : [énoncé]
a) Par croissance comparée, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f_n'(x) = \frac{1}{n!}x^{n-1}(n-x)\,\mathrm{e}^{-x}$$

On peut alors dresser le tableau de variations de f_n et affirmer

$$\sup_{x\in[a,+\infty[}|f_n(x)| = f_n(n) = \frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n}$$

Par la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

donc

$$f_n(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,+\infty[$.
b) Par référence à la série exponentielle, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est égale à 1.
Il ne peut y avoir convergence normale sur $[a,+\infty[$ car $f_n(n)$ n'est pas sommable.
En revanche sur $[0,a]$, il y a convergence normale car pour n assez grand de sorte que $n \geqslant a$, on a

$$\sup_{x\in[0,a]}|f_n(x)| = f_n(a)$$

Il y a aussi a fortiori convergence uniforme sur $[0,a]$.
Par l'absurde, s'il y a convergence uniforme sur une voisinage de $+\infty$, on obtient par le théorème de la double limite

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}f_n(x)$$

ce qui donne l'absurdité $1 = 0$.
Il n'y a donc pas convergence uniforme sur $[0,+\infty[$.

Exercice 55 : [énoncé]
Si $x = 1$ alors $u_n(x) = 0 \to 0$. Si $x \in]0,1]$ alors $u_n(x) \to 0$. La suite (u_n) converge simplement vers la fonction nulle.
$u_n'(x) = n^\alpha x^n - n^{\alpha+1}x^{n-1}(1-x) = n^\alpha x^{n-1}(n-(n+1)x)$.

$$\|u_n\|_\infty = u_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n^\alpha\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$

Or $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ et $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{1}{n+1})} = \mathrm{e}^{-1+o(1)} \to 1/\mathrm{e}$ donc

$$\|u_n\|_\infty \sim n^{\alpha-1}/\mathrm{e}$$

Il y a convergence uniforme sur $[0,1]$ si, et seulement si, $\alpha < 1$.
Pour tout $x \in [0,1]$, $\sum u_n(x)$ converge, $\|u_n\|_\infty \sim \mathrm{e}\,n^{\alpha-1}$, il y a donc convergence normale sur $[0,1]$ si, et seulement si, $\alpha < 0$.
Pour $\alpha \geqslant 0$, $u_n(x) \geqslant x^n(1-x) = v_n(x)$.
Or

$$\sum_{k=0}^{+\infty}v_k\left(\frac{n}{n+1}\right) \geqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}v_k\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k \to \frac{1}{\mathrm{e}}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty}v_k\left(\frac{n}{n+1}\right) \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty}v_k(1)$$

La série $\sum v_n$ ne converge donc pas uniformément vers $[0,1]$ et par suite $\sum u_n$ non plus.
Enfin pour $a < 1$, on a $\|u_n\|_{\infty,[0,a]} = u_n(a)$ et donc (u_n) converge uniformément sur $[0,a]$ et $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,a]$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 56 : [énoncé]
a) La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ f(1) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Puisque les fonctions f_n sont continues, pour qu'il y ait convergence uniforme, il est nécessaire que la fonction limite soit continue et donc que $f(1) = 0$.
Inversement, supposons $f(1) = 0$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [0,1]\,, |x-1| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Sur $[0,1-\alpha]$, $|f_n(x)| \leqslant (1-\alpha)^n \|f\|_\infty$ et sur $[1-\alpha,1]$, $|f_n(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant \varepsilon$
Puisque $(1-\alpha)^n \to 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, (1-\alpha)^n \|f\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

On a alors pour tout $n \geqslant N$ et tout $x \in [0,1]$, $|f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ donc $\|f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
Ainsi $f_n \xrightarrow{CU} \tilde{0}$.
b) Supposons que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
Puisqu'il n'y a pas divergence grossière, on a $f_n(1) \to 0$ et donc $f(1) = 0$.
Notons S la somme sur $[0,1]$ de la série de fonctions $\sum f_n$.
Pour $x \in [0,1[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n f(x) = \frac{f(x)}{1-x}$$

et

$$S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(1) = 0$$

Or la fonction S est continue comme somme uniformément convergente d'une série de fonctions continues.
Par suite $\lim_{x\to 1^-} S(x) = 0$ ce qui donne

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0$$

Ainsi f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.
Inversement, supposons $f(1) = 0$, f dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.
Posons (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum f_n$.
Pour $x \neq 1$,

$$S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} f(x)$$

Posons $g : x \in [0,1[\mapsto \frac{f(x)}{1-x}$ prolongée par continuité en 1 par la valeur $g(1) = 0$.
La fonction g est continue sur $[0,1]$ et $g(1) = 0$ donc la suite (g_n) définie par $g_n : x \mapsto x^n g(x)$ converge uniformément vers $\tilde{0}$ sur $[0,1]$. Or
$S_n(x) = g(x) - g_{n+1}(x)$ donc $S_n \xrightarrow[{[0,1]}]{CU} g$ et la série $\sum f_n$ converge uniformément.

Exercice 57 : [énoncé]
a) Pour $x = 1$, $u_n(x) = 0$ et la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente.
Pour $x \in [0,1[$, on peut écrire $0 \leqslant u_n(x) \leqslant a_0 x^n (1-x) = \lambda x^n$. Or il y a convergence de la série numérique $\sum x^n$ et donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n(x)$ converge.

b) Après étude de fonction, on obtient

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |u_n(x)| = \frac{a_n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \sim \frac{a_n}{en}$$

Par équivalence de séries à termes positifs, la convergence normale de $\sum u_n$ équivaut à la convergence de $\sum a_n/n$.
c) Considérons le reste

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k (1-x)$$

Par la décroissance de la suite (a_n)

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant a_{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k (1-x)$$

Ainsi, pour $x \in [0,1[$ ou $x = 1$, on obtient

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant a_{n+1}$$

Par cette majoration uniforme, on peut affirmer que, si (a_n) tend vers 0, alors la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément.
Inversement, supposons la série $\sum u_n$ uniformément convergente.
La suite (a_n) étant décroissante et positive, elle admet nécessairement une limite $\ell \geqslant 0$. On a alors

$$\forall x \in [0,1[, R_n(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ell x^k (1-x) = \ell x^{n+1} \geqslant 0$$

On obtient donc

$$\forall x \in [0,1[, \ell x^{n+1} \leqslant \|R_n\|_\infty$$

En faisant $x \to 1^-$,

$$\ell \leqslant \|R_n\|_\infty$$

et ceci valant pour tout $n \in \mathbb{N}$, on conclut $\ell = 0$

Exercice 58 : [énoncé]
Remarquons que pour tout $t \in [0,1]$,

$$t - t^2 \in [0,1/4]$$

Pour $x \in [0,1/4]$,

$$|u_{n+1}(x)| \leqslant x \left\|u_n\right\|_{\infty,[0,1/4]} \leqslant \frac{1}{4} \left\|u_n\right\|_{\infty,[0,1/4]}$$

Par une récurrence facile
donc aisément

$$\left\|u_n\right\|_{\infty,[0,1/4]} \leqslant \frac{1}{4^n}$$

Par la remarque initiale, pour tout $x \in [0,1]$,

$$|u_{n+1}(x)| \leqslant \left\|u_n\right\|_{\infty,[0,1/4]} \leqslant \frac{1}{4^n}$$

donc

$$\left\|u_{n+1}\right\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \frac{1}{4^n}$$

On peut conclure que la série $\sum u_n$ est normalement convergente.

Exercice 59 : [énoncé]
La fonction u_n est dérivable avec

$$u_n'(x) = \frac{1-n^2x}{(1+n^2x)^3}$$

Les variations de u_n sur $[0,+\infty[$ fournissent

$$\left\|u_n\right\|_\infty = u_n\left(1/n^2\right) = \frac{1}{4n^2}$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$, a fortiori uniformément et simplement.
Soit $a > 0$. Pour $x \geqslant a$,

$$|u_n'(x)| \leqslant \frac{1+n^2x}{(1+n^2x)^3} = \frac{1}{(1+n^2a)^2} \sim \frac{1}{a^2}\frac{1}{n^4}$$

La série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.
En revanche, il n'y a pas convergence en 0, ni convergence uniforme sur $]0,a]$ car le théorème de la double limite ne peut s'appliquer en 0.

Exercice 60 : [énoncé]
a) ζ est bien définie sur $]1,+\infty[$. Les fonctions $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et

$$f_n^{(p)}(x) = \frac{(-\ln n)^p}{n^x}$$

Pour tout $a > 1$ sur $[a,+\infty[$,

$$\left|f_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{(\ln n)^p}{n^a}$$

donc

$$\left\|f_n^{(p)}\right\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{(\ln n)^p}{n^a}$$

Pour $\rho \in]1,a[$,

$$n^\rho \left\|f_n^{(p)}\right\|_{\infty,[a,+\infty[} \to 0$$

donc $\sum \left\|f_n^{(p)}\right\|_{\infty,[a,+\infty[}$ converge puis $\sum f_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.
Il en découle que la série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge simplement sur $]1,+\infty[$ et $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]1,+\infty[$. Par théorème on peut conclure ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.
b)

$$\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)}{n^x} \leqslant 0$$

donc ζ est décroissante.

$$\zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} \geqslant 0$$

donc ζ est convexe.
c) La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[2,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$ si $n = 1$ et 0 sinon. Par le théorème de la double limite

$$\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

d) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante donc

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

En sommant, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

avec

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{x-1}$$

On en déduit

$$\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$$

e) Le signe de $\ln(\zeta(x))''$ est celui de

$$\zeta(x)\zeta''(x) - \zeta'(x)^2$$

Or

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{-\ln n}{n^x} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{x/2}} \frac{-\ln n}{n^{x/2}}$$

donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{-\ln n}{n^x}\right)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-\ln n)^2}{n^x}$$

puis quand $N \to +\infty$,

$$\zeta'(x)^2 \leqslant \zeta(x)\zeta''(x)$$

Exercice 61 : [énoncé]

a) Posons $u_n(x) = 1/n^x$ définie sur $]1, +\infty[$.

La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ ce qui assure la bonne définition de $\zeta(x)$.

Plus précisément, pour $a > 1$, on a

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} |u_n(x)| = u_n(a) \text{ avec } \sum u_n(a) \text{ convergente}$$

et il y a donc convergence normale (et donc uniforme) de la série de fonctions u_n sur $[a, +\infty[$.

Puisque

$$u_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$$

on peut appliquer le théorème de la double limite et affirmer que ζ tend en $+\infty$ vers la somme convergente des limites

$$\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

b) Posons $v_n(x) = \zeta(n)x^n/n$. Pour $x \neq 0$, on a

$$\left|\frac{v_{n+1}(x)}{v_n(x)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$$

Par le critère de d'Alembert, la série converge pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$ (en fait le rayon de convergence de cette série entière vaut 1).

Pour $x = 1$, il y a divergence car

$$\frac{\zeta(n)}{n} \sim \frac{1}{n}$$

Pour $x = -1$, il y a convergence en vertu du critère spécial des séries alternées. En effet, la suite $((-1)^n\zeta(n)/n)$ est alternée et décroît en valeur absolue vers 0 notamment car $\zeta(n+1) \leqslant \zeta(n)$.

c) En tant que somme de série entière, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.

Puisque F est aussi définie en -1, en filière PC, on peut affirmer directement que F est continue en -1 en vertu d'un théorème du cours. En filière MP et PSI, il faut justifier cette continuité...

Les fonctions v_n sont continues sur $[-1, 0]$ et l'on vérifie que la série $\sum v_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées pour tout $x \in [-1, 0]$. On peut alors majorer le reste de cette série par son premier terme

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x)\right| \leqslant |v_{n+1}(x)| \leqslant \frac{\zeta(n)}{n}$$

Ce dernier majorant étant uniforme de limite nulle, on peut affirmer qu'il y a convergence uniforme de la série de fonctions $\sum v_n$ sur $[-1, 0]$ et sa somme F est donc continue.

d) Par dérivation de la somme d'une série entière, on obtient pour $x \in]-1, 1[$,

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^n}{p^{n+1}}$$

On peut permuter les deux sommes par le théorème de Fubini car il y a convergence des séries

$$\sum_{p\geqslant 1} \left|\frac{x^n}{p^{n+1}}\right| \text{ et } \sum_{n\geqslant 1}\sum_{p=1}^{+\infty} \left|\frac{x^n}{p^{n+1}}\right|$$

On en déduit après sommation géométrique

$$F'(x) = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{p^{n+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x}{p(p-x)} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p-x} - \frac{1}{p}\right)$$

et on ne peut faire plus simple.

Exercice 62 : [énoncé]
Chaque $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et

$$f_n'(x) = (-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n^x}$$

Par le critère spécial des séries alternées, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers ζ_2 sur $]0,+\infty[$.
La suite $(f_n'(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée. Etudions

$$\varphi : t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$$

On a

$$\varphi'(t) = \frac{1 - x\ln t}{t^{x+1}}$$

Pour $\ln t \geqslant 1/x$, $\varphi'(t) \leqslant 0$ donc φ décroissante sur $\left[\mathrm{e}^{1/x},+\infty\right[$. Ainsi $(f_n'(x))_{n\geqslant 1}$ est décroissante à partir du rang $\left\lfloor \mathrm{e}^{1/x}\right\rfloor + 1$ et tend vers 0. On peut appliquer le critère spécial des séries alternées. Pour $a > 0$ et pour $n \geqslant \left\lfloor \mathrm{e}^{1/a}\right\rfloor + 1$ on a pour tout $x \in [a,+\infty[$,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^x}\right| \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \to 0$$

$\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$ donc converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$.
On peut alors conclure que la fonction ζ_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 63 : [énoncé]
Par le critère spécial des séries alternées, ζ_2 est bien définie sur $]0,+\infty[$.
$f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et

$$f_n^{(p)}(x) = (-1)^{n+p}\frac{(\ln n)^p}{n^x}$$

La suite $(f_n^{(p)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée. Etudions

$$\varphi : t \mapsto \frac{(\ln t)^p}{t^x}$$

On a

$$\varphi'(t) = \frac{\ln(t)^{p-1}(p - x\ln t)}{t^{x+1}}$$

Pour $\ln t \geqslant p/x$, $\varphi'(t) \leqslant 0$ donc φ décroissante sur $\left[\mathrm{e}^{p/x},+\infty\right[$. Ainsi $(f_n^{(p)}(x))_{n\geqslant 1}$ est décroissante à partir du rang $E(\mathrm{e}^{p/x}) + 1$ et tend vers 0. On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées. Pour $a > 0$ et pour $n \geqslant E(\mathrm{e}^{p/a}) + 1$ on a pour tout $x \in [a,+\infty[$,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+p}(\ln n)^p}{n^x}\right| \leqslant \frac{(\ln(n+1))^p}{(n+1)^x} \leqslant \frac{(\ln(n+1))^p}{(n+1)^a}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{(\ln(n+1))^p}{(n+1)^a} \to 0$$

$\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$ (pour tout $a > 0$) donc converge simplement sur $]0,+\infty[$ et converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$.
Par théorème on peut alors conclure que ζ_2 est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 64 : [énoncé]
La convergence pour $x > 0$ de la série définissant $\zeta_2(x)$ est acquise par le critère spécial des séries alternées.
On peut combiner les termes d'indices impairs avec les termes d'indices pairs qui suivent

$$\zeta_2(x) = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2p-1)^x} - \frac{1}{(2p)^x}\right)$$

Considérons alors la fonction $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{1}{(2t-1)^x} - \frac{1}{(2t)^x}$$

La fonction f est décroissante et donc

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

puis en sommant ces encadrements

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \zeta_2(x) \leqslant f(1) + \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Or
$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2(1-x)}\left[(2t-1)^{1-x}-(2t)^{1-x}\right]_1^{+\infty}$$
avec
$$(2t-1)^{1-x}-(2t)^{1-x} = -(2t)^{1-x}\left(1-\left(1-\frac{1}{2t}\right)^{1-x}\right) \sim (x-1)(2t)^{-x} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$
et donc
$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2(1-x)}\left(2^{1-x}-1\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{2}$$
De plus
$$f(1) = 1-\frac{1}{2^x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$
et donc par encadrement
$$\zeta_2(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{2}$$

Exercice 65 : [énoncé]
a) ζ est définie sur $]1,+\infty[$ et ζ_2 est définie sur $]0,+\infty[$ (via le critère spécial des séries alternées)
b) $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est continue.
Pour tout $a>1$,
$$\left|\frac{1}{n^x}\right| \leqslant \frac{1}{n^a}$$
donc
$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{1}{n^a}$$
or $\sum \frac{1}{n^a}$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment inclus dans $]1,+\infty[$. Par théorème, on obtient que la fonction ζ est continue.
$g_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ est continue.
Par le critère spécial des séries alternées
$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| \leqslant \frac{1}{(N+1)^x}$$
Pour tout $a>0$,
$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| \leqslant \frac{1}{(N+1)^x} \leqslant \frac{1}{(N+1)^a}$$
donc $\sum g_n$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$. Par théorème on obtient que la fonction ζ_2 est continue sur $]0,+\infty[$.
c) Pour $x>1$
$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x} - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^x} = \zeta(x) - 2^{1-x}\zeta(x)$$

Exercice 66 : [énoncé]
On peut écrire
$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2x}{n^2-x^2}$$
avec convergence normale sur $[0,1]$ donc
$$\int_0^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty}\int_0^1 \frac{1}{n-x}-\frac{1}{n+x}\,\mathrm{d}x$$
Or
$$\int_0^1 \frac{1}{n-x}-\frac{1}{n+x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{n}{n-1} - \ln\frac{n+1}{n}$$
et en transitant par les sommes partielles
$$\sum_{n=2}^{N}\int_0^1 \frac{1}{n-x}-\frac{1}{n+x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{N}\ln\frac{n}{n-1} - \sum_{n=2}^{N}\ln\frac{n+1}{n} = \ln N - \ln(N+1) + \ln 2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln 2$$
Ainsi
$$\int_0^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x = \ln 2$$

Exercice 67 : [énoncé]
a) Pour $x\in\,]0,1[$, on obtient par sommation géométrique
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = -\frac{x^2\ln x}{1+x^2}$$
Cette relation vaut aussi pour $x=0$ ou $x=1$.

b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées et donc

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+2} x^{2k+2} \ln x\right| \leqslant x^{2(n+2)} |\ln x|$$

L'étude de $\varphi : x \mapsto x^{2(n+2)} |\ln x|$ donne

$$\forall x \in [0,1]\,, x^{2(n+2)} |\ln x| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2(n+2)}$$

donc

$$\|R_n\|_\infty \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2(n+2)} \to 0$$

c) On a

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

et on peut calculer la dernière intégrale par intégration terme à terme car converge uniformément sur $[0,1]$. Cela donne

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}$$

puis le résultat.

Exercice 68 : [énoncé]

$$\left\|\frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}\right\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

est le terme générale d'une série convergente. Par convergence normale sur le segment $[0,1]$:

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}\mathrm{d}\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{2\alpha\mathrm{d}\alpha}{\alpha^2+n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2} = \pi\frac{\mathrm{ch}\pi\alpha}{\mathrm{sh}\pi\alpha} - \frac{1}{\alpha}$$

donc

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}\mathrm{d}\alpha = \left[\ln\frac{\mathrm{sh}\pi\alpha}{\alpha}\right]_0^1 = \ln\frac{\mathrm{sh}\pi}{\pi}$$

On en déduit que

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\mathrm{sh}\pi}{\pi}$$

Exercice 69 : [énoncé]
Pour $x \leqslant 0$, il y a divergence grossière.
Pour $x > 0$, $n^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}+2\ln n} \to 0$ donc $\sum \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ est absolument convergente. Ainsi f est définie sur $]0,+\infty[$.
Pour $a > 0$, sur $[a,+\infty[$, $\left|\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}$. Cela permet d'établir la convergence normale de la série de fonctions sur $[a,+\infty[$. Par convergence uniforme sur tout segment d'une série de fonctions continues, on peut affirmer que f est continue sur $]0,+\infty[$.
Par convergence uniforme sur $[1,+\infty[$, on peut appliquer le théorème de la double limite et affirmer

$$\lim_{+\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = 1$$

Pour $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}$ est décroissante donc

$$\int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

En sommant (avec $n = 0$ à part pour la majoration) on obtient

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x^2}$$

On en déduit

$$f(x) \sim \frac{2}{x^2}$$

quand $x \to 0^+$.

Exercice 70 : [énoncé]
Par le critère spécial des séries alternées, il est immédiate de justifier que $S(t)$ est définie pour tout $t > 0$.

On peut réorganiser l'expression de $S(t)$ de la façon suivante :

$$S(t) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{2p}}{2pt+1} + \frac{(-1)^{2p+1}}{(2p+1)t+1}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{t}{(2pt+1)\left[(2p+1)t+1\right]}$$

La fonction $f_t : x \mapsto \frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)}$ est décroissante.
Par comparaison avec une intégrale, on obtient l'encadrement

$$\int_1^{+\infty} f_t(x)\,\mathrm{d}x \leqslant S(t) \leqslant \int_0^{+\infty} f_t(x)\,\mathrm{d}x$$

Puisque par les calculs précédents

$$\frac{t}{(2xt+1)\left((2x+1)t+1\right)} = \frac{1}{2xt+1} - \frac{1}{(2x+1)t+1}$$

On obtient

$$\int_0^{+\infty}\frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2t}\ln\frac{(2xt+1)}{((2x+1)t+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln(1+t)}{2t}$$

et

$$\int_1^{+\infty}\frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2t}\ln\frac{(2xt+1)}{((2x+1)t+1)}\right]_1^{+\infty} = \frac{\ln(1+3t)-\ln(1+2t)}{2t}$$

Quand $t \to 0^+$, on obtient par encadrement $S(t) \to 1/2$.

Exercice 71 : [énoncé]
a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum u_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
De plus

$$\left\|\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n\right\|_\infty \leqslant \ln\left(1+\frac{x^2}{(N+1)(1+x^2)}\right) \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{N+1}\right) \to 0$$

donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
b) $u_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln(1+1/n)$. Par converge uniformément

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln(1+1/n)$$

Pour calculer cette somme, manipulons les sommes partielles et séparons les termes d'indice pair de ceux d'indice impair

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N}\ln(2n+1)-\ln(2n) + \sum_{n=1}^{N}\ln(2n-1)-\ln(2n)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\left(\frac{(2N)!}{(2^N N!)^2}\right)^2(2N+1)\right)$$

Or

$$N! \sim \sqrt{2\pi N}N^N\mathrm{e}^{-N}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\ln(1+1/n) \sim \ln\left(2/\pi\right)$$

On en déduit

$$\ell = \ln\left(2/\pi\right)$$

Exercice 72 : [énoncé]
En réorganisant la somme

$$u_n = \sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n)$$

avec $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_k(n) = (1-k/n)^n \text{ si } k \leqslant n \text{ et } f_k(n) = 0 \text{ sinon}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, $f_k(n) \to \mathrm{e}^{-k}$.
Pour $k \leqslant n$, $|f_k(n)| = \exp(n\ln(1-k/n)) \leqslant \exp(-k)$ et cette majoration vaut aussi pour $k > n$. Ainsi $\|f_k\|_{\infty,\mathbb{N}} \leqslant \mathrm{e}^{-k}$ et donc la série $\sum f_k$ converge normalement sur $A = \mathbb{N}$.
Par interversion limite/somme infinie, on obtient

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-k} = \frac{1}{1-1/\mathrm{e}}$$

Exercice 73 : [énoncé]
Posons
$$f_k(n) = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n\alpha} \text{ pour } k \leqslant n \text{ et } f_k(n) = 0 \text{ sinon}$$
Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé,
$$f_k(n) \to \exp(-k\alpha)$$
Pour $k \leqslant n$
$$|f_k(n)| = \exp(n\alpha \ln(1 - k/n)) \leqslant \mathrm{e}^{-k\alpha}$$
et cette majoration vaut aussi pour $k > n$.
Ainsi
$$\|f_k\|_{\infty,\mathbb{N}} \leqslant \mathrm{e}^{-k\alpha}$$
et donc la série $\sum f_k$ converge normalement sur $A = \mathbb{N}$.
Par interversion limite/somme infinie
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k\alpha}$$
Ainsi
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n\alpha} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha}}{\mathrm{e}^{\alpha} - 1}$$

Exercice 74 : [énoncé]
Par la formule du binôme
$$\left(1 + \frac{z}{p}\right)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{z^k}{p^k}$$
Considérons $f_k : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ définies par
$$f_k(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} \frac{z^k}{x^k} \text{ si } x \geqslant k \text{ et } f_k(x) = 0 \text{ sinon}$$
En tout $p \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(p) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{z^k}{p^k} = \left(1 + \frac{z}{p}\right)^p$$
La série de fonctions $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ converge simplement vers $x \to \left(1 + \frac{z}{x}\right)^x$ en tout $p \in \mathbb{N}$. De plus, puisque $|f_k(x)| \leqslant \frac{|z|^k}{k!}$, la convergence est normale sur $\mathbb{R}^+$. Pour k fixé, quand $x \to +\infty$,
$$f_k(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{x^k} \frac{z^k}{k!} \to \frac{z^k}{k!}$$
Par le théorème de la double limite
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$
i.e.
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^z$$

Exercice 75 : [énoncé]
Posons
$$f_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x} \text{ avec } x > 0$$
a) Soit $x \in]0, +\infty[$. On a $f_n(x) \sim 1/n^2 x$ donc $\sum f_n(x)$ converge absolument.
On en déduit que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et donc la fonction $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est bien définie.
b) Les f_n sont continues sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Soit $a > 0$,
$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{1}{n + n^2 a} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ donc converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$.
On peut donc conclure que S est continue.
c) Chaque f_n est décroissante donc la fonction S l'est aussi.
d) Par convergence normale sur $[1, +\infty[$,
$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$$
On remarque
$$x f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{n^2}$$
Posons $g_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+nx)}$. La fonction g_n croît de 0 à $1/n^2$ sur $\mathbb{R}^+$ donc
$$\|g_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = \frac{1}{n^2}$$
La série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ donc
$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Par suite $xS(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$ puis

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}$$

e) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t(1+tx)}$ est décroissante donc par comparaison avec une intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \leqslant \frac{1}{1+x} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)}$$

Or

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx}\right) \mathrm{d}t = \left[\ln \frac{t}{1+tx}\right]_1^{+\infty} = \ln(1+x) - \ln(x)$$

donc

$$S(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$$

Exercice 76 : [énoncé]

a) $f_n : x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}$ est définie et continue sur $]-1,+\infty[$

Soient $-1 < a \leqslant 0 \leqslant 1 \leqslant b$.

$$\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{b}{n(n+a)}$$

La série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$ et donc converge uniformément sur tout segment inclus dans $]-1,+\infty[$.

b) Chaque f_n est croissante donc par sommation de monotonie, S est croissante.

c)

$$S(x+1) - S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

donc

$$S(x+1) - S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1}$$

d) Quand $x \to -1$, $S(x+1) \to S(0) = 0$ puis

$$S(x) = -\frac{1}{x+1} + S(x+1) \sim -\frac{1}{x+1}$$

e) $S(0) = 0$ et $S(x+1) - S(x) = \frac{1}{x+1}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

f) On sait $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$ et on sait $\ln(n+1) \sim \ln n$.

Puisque $S(E(x)) \leqslant S(x) \leqslant S(E(x)+1)$ on obtient

$$S(x) \sim \ln E(x) \sim \ln x$$

Exercice 77 : [énoncé]

a) Posons $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$

Pour $x \leqslant 0$, la série $\sum \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ diverge grossièrement.

Pour $x > 0$, $n^2 f_n(x) \to 0$ donc $\sum \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ converge absolument.

La fonction f est donc définie sur $]0,+\infty[$.

Pour $a > 0$, $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = f_n(a)$ et $\sum f_n(a)$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$. Comme somme de série de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment, on peut affirmer que f est continue sur $]0,+\infty[$.

b) f est somme de fonction strictement décroissante, elle donc elle-même strictement décroissante.

c) Par convergence uniforme sur $[a,+\infty[$, on peut intervertir limite en $+\infty$ et somme infinie. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

d) Par monotonie de $t \mapsto \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}$, $\int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

En sommant $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Or $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x^2}$ et $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \sim \frac{2}{x^2}$ donc $f(x) \sim \frac{2}{x^2}$.

Exercice 78 : [énoncé]

a) Notons : $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0$ donc $S(x)$ est bien définie.

Pour $x \in]0,1[$: $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \sim x < 1$ et $S(x)$ est bien définie.

Pour $x = 1$: $f_n(x) = 1/2$ et $S(x)$ n'est pas définie.

Pour $x \in]1,+\infty[$: $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \to \frac{1}{x} < 1$ donc $S(x)$ est bien définie.

Finalement S est définie sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$ par convergence simplement de $\sum f_n$ sur ce domaine.

b)

$$\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\,,\ S(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1/x^n}{1+1/x^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = S(x)$$

c) Soit $0 < a < 1$. Sur $[0,a]$,

$$\|f_n\|_{\infty,[0,a]} \leqslant a^n \text{et } \sum_{n=1}^{+\infty} a^n < 1$$

donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[0,a]$ et donc converge uniformément sur tout segment de $[0,1[$. Par théorème S est continue sur $[0,1[$.
Par composition de fonctions continues $S : x \mapsto S(1/x)$ est aussi continue sur $]1,+\infty[$.
d)

$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x^{2n}) - 2nx^{3n-1}}{(1+x^{2n})^2} = \frac{nx^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2}$$

Chaque f_n est croissante sur $[0,1[$ et décroissante sur $]1,+\infty[$.
Par sommation de monotonie, la fonction S est croissante sur $[0,1[$ et décroissante sur $]1,+\infty[$.
$S(0) = 0$.
Quand $x \to 1^-$,

$$S(x) \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2} = \frac{2x}{1-x} \to +\infty$$

donc $\lim_{x\to 1^-} S(x) = +\infty$.
Puisque $S(1/x) = S(x)$, on obtient par composition de limites, $\lim_{x\to 1^+} S(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$.

Exercice 79 : [énoncé]
Pour $|x| \geqslant 1$, la série est grossièrement divergente.
Pour $|x| < 1$,

$$\frac{x^n}{1+x^n} \sim x^n$$

et donc la série est absolument convergente.
La fonction S est définie sur $]-1,1[$.
Posons $u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$.
u_n est de classe $\mathcal{C}^1$, $\sum u_n$ converge simplement,

$$u_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

donc pour $a \in [0,1[$,

$$\|u_n'\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant n\frac{a^{n-1}}{1-a^n} \sim na^{n-1}$$

ce qui assure la convergence normale de $\sum u_n'$ sur tout segment de $]-1,1[$.
Par suite la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$S(0) = \frac{1}{2} \text{ donc } S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$$

Pour $x \in [0,1[$,

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p x^{n(p+1)}$$

Puisque $\sum_{p\geqslant 0} \left|(-1)^p x^{n(p+1)}\right|$ converge et $\sum_{n\geqslant 1}\sum_{p=0}^{+\infty} \left|(-1)^p x^{n(p+1)}\right|$ aussi, on peut permuter les deux sommes et affirmer

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{p+1}}{1-x^{p+1}}$$

On a alors

$$(1-x)S(x) = \frac{1-x}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p u_p(x)$$

avec $u_p(x) = x^{p+1}\frac{1-x}{1-x^{p+1}}$ pour $x \in [0,1[$.
La fonction u_p est continue sur $[0,1[$ et prolonge par continuité en 1 en posant $u_p(1) = 1/(p+1)$.
Le critère spécial des séries alternées s'applique à la série $\sum(-1)^p u_p(x)$ et donc

$$\left\|\sum_{k=p+1}^{\infty} (-1)^k u_k(x)\right\|_\infty \leqslant u_{p+1}(x)$$

et une étude de variation permet d'affirmer $u_{p+1}(x) \leqslant \frac{1}{p+2}$. Ainsi, la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ et donc sa somme est continue en 1. Cela permet d'affirmer

$$(1-x)S(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p+1} = \ln 2$$

et finalement

$$S(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln 2}{1-x}$$

Exercice 80 : [énoncé]
Posons
$$f_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$$
Sachant
$$2\,|nx| \leqslant 1 + n^2x^2$$
on a
$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2n^2}$$
On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions f_n étant continue, la somme S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et
$$f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2}$$
Soit $a > 0$. Pour $|x| \geqslant a$,
$$|f_n'(x)| \leqslant \frac{1+n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2} = \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \leqslant \frac{1}{n(1+n^2a^2)}$$
On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^\star$.
La somme S est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$.
Montrons que la fonction S n'est pas dérivable en 0.
$$\frac{1}{x}\left(S(x) - S(0)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$$
Par comparaison avec une intégrale
$$\frac{1}{x}\left(S(x) - S(0)\right) \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2x^2)}$$
Par le changement de variable $u = tx$
$$\frac{1}{x}\left(S(x) - S(0)\right) \geqslant \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{u(1+u^2)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$
car la fonction positive $u \mapsto 1/u(1+u^2)$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$.

Exercice 81 : [énoncé]
Posons
$$f_n(x) = \frac{1}{n^2}\arctan(nx)$$
Chaque f_n est continue et $\|f_n\|_\infty = \frac{\pi}{2n^2}$ est terme général d'une série convergente.
Par convergence normale, on peut affirmer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et
$$f_n'(x) = \frac{1}{n(1+(nx)^2)}$$
Pour $a > 0$, sur $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, -a]$,
$$\|f_n'\|_\infty \leqslant \frac{1}{n(1+(na)^2)}$$
ce qui donne la convergence normale de la série des dérivées.
Ainsi, par convergence uniforme sur tout segment, on obtient f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$.

Exercice 82 : [énoncé]
a) En vertu du théorème des accroissements finis
$$|u_n(x)| \leqslant \left(\sqrt{n+x} - \sqrt{n}\right) \sup_{\left[\sqrt{n},\sqrt{n+x}\right]} |(\arctan)'| = \frac{\sqrt{n+x}-\sqrt{n}}{1+n}$$
donc
$$|u_n(x)| \leqslant \frac{x}{(1+n)(\sqrt{n}+\sqrt{n+x})} \leqslant \frac{x}{2\sqrt{n}(n+1)} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$
On en déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement et donc la fonction S est bien définie.
Les fonctions u_n sont continue et pour tout $a \in \mathbb{R}^+$,
$$\forall x \in [0,a]\,, |u_n(x)| \leqslant \frac{a}{2\sqrt{n}(n+1)}$$
On peut donc affirmer la convergence uniforme sur tout segment de la série $\sum u_n$ ce qui assure la continuité de S.
b) Montrons que S tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
Remarquons que par le théorème des accroissements finis
$$u_n(n) = \arctan\sqrt{2n} - \arctan\sqrt{n} \geqslant \frac{\sqrt{2n}-\sqrt{n}}{1+2n} \sim \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{n}}$$

et il y a donc divergence vers $+\infty$ de la série $\sum u_n(n)$.
Soit $A \in \mathbb{R}^+$. Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=0}^{N} u_n(n) \geqslant A$$

Pour $x \geqslant N$,

$$S(x) \geqslant \sum_{n=0}^{N} u_n(x) \geqslant \sum_{n=0}^{N} u_n(N) \geqslant \sum_{n=0}^{N} u_n(n) \geqslant A$$

On peut donc affirmer

$$S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Exercice 83 : [énoncé]
a) Posons

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$$

Les fonctions u_n sont définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ car $u_n(x) \sim 1/n^2$.
On a

$$u_n'(x) = \frac{-2x}{(n^2 + x^2)^2}$$

donc sur $[-a, a]$,

$$\|u_n'\|_\infty \leqslant \frac{2a}{n^4}$$

et la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement et donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.
On peut conclure que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$.
b) La fonction $t \mapsto 1/(t^2 + x^2)$ est décroissante donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + x^2} \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + x^2}$$

Or

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + x^2} = \frac{\pi}{2x} \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + x^2} = \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x}$$

donc

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$$

c) On peut écrire

$$\frac{1}{n^2 + x^2} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{1 + x^2/n^2}\right) = \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) + \frac{1}{n^4}\frac{x^4}{n^2 + x^2}$$

et par convergence des sommes introduites

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^4} + x^4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4(n^2 + x^2)}$$

Or

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4(n^2 + x^2)}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} < +\infty$$

donc

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{90}x^2 + O(x^4)$$

Exercice 84 : [énoncé]
Posons

$$f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

Puisque les fonctions f_n sont toutes impaires, on limite l'étude à $x \in [0, +\infty[$.
A partir d'un certain rang N_x, on a $x/n \leqslant \pi/2$ et alors

$$\sin(x/n) \in [0, 1]$$

La série numérique $\sum f_n(x)$ vérifie alors les hypothèses du critère spécial des séries alternées à partir du rang N_x et par conséquent cette série converge.
Ainsi la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et donc sa fonction somme, que nous noterons S, est définie sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^n}{n^2}\cos\left(\frac{x}{n}\right)$$

de sorte que

$$\|f_n'\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1}{n^2}$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, a fortiori cette fonction est continue.

Exercice 85 : [énoncé]
a) Posons $f_n(t) = \frac{(-1)^n}{1+nt}$ pour $t > 0$.
Par application du critère spécial des séries alternées, $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et

$$\|R_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{1}{1+na} \to 0$$

pour tout $a > 0$.
Par converge uniformément sur tout segment d'une série de fonctions continue, S est définie et continue sur $]0,+\infty[$.
b) Par converge uniformément sur $[a,+\infty[$,

$$\lim_{+\infty} S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{t\to+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nt} = 1$$

Par application du critère spécial des séries alternées

$$1 - \frac{1}{1+t} \leqslant S(t) \leqslant 1$$

c) Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement.

$$f_n'(t) = \frac{(-1)^{n+1}n}{(1+nt)^2}$$

La série $\sum f_n'(t)$ est alternée avec $|f_n'(t)| = \frac{n}{(1+nt)^2}$.
Puisque

$$|f_n'(t)| - \left|f_{n+1}'(t)\right| = \frac{n(n+1)t^2 - 1}{(1+nt)^2(1+(n+1)t)^2}$$

la suite $(|f_n'(t)|)$ décroît vers 0 à partir d'un certain rang.
Soit $a > 0$.
A partir d'un certain rang n_0,

$$n(n+1)a^2 - 1 \geqslant 0$$

et alors pour tout $t \geqslant a$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à partir du rang n_0.
On a alors

$$|R_n(t)| \leqslant \frac{n}{(1+nt)^2} \leqslant \frac{n}{(1+na)^2}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{n}{(1+na)^2} \to 0$$

Ainsi la série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.
Par théorème, on peut alors conclure que S est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 86 : [énoncé]
On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$

$$u_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{x}{n+x^2}$$

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum u_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées et donc $\sum u_n$ converge simplement. La fonction S est donc bien définie, elle est évidemment impaire.
b) Soit $a > 0$. Par le critère spécial des séries alternées

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{x}{(n+1)+x^2} \leqslant \frac{a}{n+1} \text{ pour } x \in [-a,a]$$

et donc

$$\|R_n\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant \frac{a}{n} \to 0$$

Il y a convergence uniforme sur $[-a,a]$ pour tout $a > 0$ et donc convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.
De plus chaque fonction u_n est continue donc S est continue.
c) Par le critère spécial des séries alternées, on peut encadrer S par deux sommes partielles consécutives

$$\frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{2+x^2} \leqslant S(x) \leqslant \frac{x}{1+x^2}$$

et on peut donc affirmer $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercice 87 : [énoncé]
a) Pour $x \in]-1,1[$,

$$|u_n(x)| = o\left(|x|^n\right)$$

donc $\sum u_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.
Pour $x = 1$,

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$$

donc $\sum u_n(x)$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées.
Pour $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$,

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1 - \frac{1}{1+x^n}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} + o\left(\frac{1}{|x|^n}\right)$$

donc $\sum u_n(x)$ est somme d'une série convergente et d'une série absolument convergente.

b)

$$f(x)+f(1/x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x^n}{1+x^n}+\frac{1/x^n}{1+1/x^n}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

c) Soit $a\in[0,1[$.

$$\|f\|_{\infty,[-a,a]}\leqslant\frac{a^n}{1-a^n}\leqslant\frac{a^n}{1-a}$$

donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a,a]$.
Par convergence uniforme d'une série de fonctions continues sur tout segment de $]-1,1[$, on peut affirmer que f est continue sur $]-1,1[$. Puisque $f(x)=C^{te}-f(1/x)$, f est aussi continue sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$ par composition de fonctions continues.
d) Pour $x\in[0,1]$, la série $\sum u_n(x)$ est alternée et la suite $\left(\frac{1}{n}\frac{x^n}{1+x^n}\right)_{n\geqslant 0}$ décroît vers 0 (après étude non détaillée ici) donc le critère spécial des séries alternées s'applique et

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)\right|\leqslant\frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}}\leqslant\frac{1}{n+1}$$

puis

$$\|R_n\|_{\infty,[0,1]}\leqslant\frac{1}{n+1}\to 0$$

La série de fonctions continues $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ donc f est continue sur $[0,1]$ et donc continue à gauche en 1. Par la relation du b) on obtient aussi f continue à droite en 1.

Exercice 88 : [énoncé]
a)

$$\ln f_{n+1}(x)-\ln f_n(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln(n+1)-\ln(x+n+1)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\sum\ln f_{n+1}(x)-\ln f_n(x)$ converge donc la suite $(\ln f_n(x))$ converge puis $(f_n(x))$ converge vers un réel strictement positif.
b)

$$\ln\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\left(x\ln n+\sum_{k=1}^{n}\ln k-\sum_{k=0}^{n}\ln(x+k)\right)$$

avec $x\ln n+\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k-\sum\limits_{k=0}^{n}\ln(x+k)=x\ln n-\ln x-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$.

Or la série $\sum\left(\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$ est absolument convergente car de terme général en $O\left(1/n^2\right)$ et

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{k}-\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)=x\ln n+\gamma x+o(1)-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

donc

$$\ln\Gamma(x)=-\ln x-\gamma x+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$$

c) Posons $f_n(x)=\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ pour $x>0$ et $n\geqslant 1$. f_n est $\mathcal{C}^1$, $\sum f_n$ converge simplement et $f_n'(x)=\frac{x}{n(n+x)}$ ce qui permet d'affirmer $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment$[a,b]\subset\mathbb{R}^{+\star}$.

Exercice 89 : [énoncé]
a) Si $x\leqslant 0$, la série numérique $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement.
Si $x>0$ alors $n^2f_n(x)=\mathrm{e}^{2\ln n-xn^\alpha}\to 0$ donc $\sum f_n(x)$ est absolument convergente.
Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. f est définie sur $]0,+\infty[$.
b) Les fonctions f_n sont continues.
Pour $a>0$, $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}=f_n(a)$ et $\sum f_n(a)$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$. Par convergence uniforme sur tout segment, on peut affirmer que f est continue.
c) Par convergence uniforme sur $[a,+\infty[$, on peut intervertir limite en $+\infty$ et somme infinie. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=1$.

Exercice 90 : [énoncé]
a) Pour $x<0$, $u_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\infty$ donc $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement.
Pour $x=0$, $u_n(x)=0$ donc $\sum u_n(0)$ converge
Pour $x>0$, $u_n(x)=o(1/n^2)$ par croissance comparée et donc $\sum u_n(x)$ converge absolument.
On conclut $I=\mathbb{R}^+$
b) Pour $[a,b]\subset\mathbb{R}^{+\star}$,

$$\|u_n\|_{\infty,[a,b]}=\sup_{x\in[a,b]}|u_n(x)|\leqslant\frac{n^\alpha b\mathrm{e}^{-na}}{n^2+1}$$

donc $\sum u_n$ est une série de fonctions continues convergeant normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^{+\star}$. Sa somme est alors continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

c) Après étude des variations de la fonction,

$$\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |u_n(x)| = u_n(1/n) \sim \frac{1}{n^{3-\alpha}}$$

Il y a convergence normale si, et seulement si, $\alpha < 2$.
d) On peut écrire

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^\alpha \mathrm{e}^{-k/n}}{k^2+1} \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k^2}{k^2+1}\mathrm{e}^{-k/n} \geqslant \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-k/n}$$

Or par sommation géométrique

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-k/n} = \frac{1}{2n}\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)/n}}{1-\mathrm{e}^{-1/n}} \to \frac{1}{2\mathrm{e}}$$

donc $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$ ne peut tendre vers 0 quand $n\to+\infty$.
S'il y avait convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ alors

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \to 0$$

ce qui vient d'être exclu.
e) Si S est continue en 0 alors par sommation de terme positif

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) \leqslant S(1/n) \to S(0) = 0$$

ce qui est encore à exclure.

Exercice 91 : [énoncé]
Puisque $a_n > 0$ et $\sum a_n(1+|x_n|)$ converge, les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n x_n$ sont absolument convergentes.
Posons $f_n(x) = a_n|x-x_n|$.
Comme $|a_n|x-x_n|| \leqslant |a_n||x| + |a_n x_n|$, la série des fonctions f_n converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions f_n sont continues et sur $[-M,M]$, $\|f_n\|_\infty \leqslant M a_n + a_n|x_n|$.
Par convergence normale sur tout segment d'une série de fonctions continues, on peut affirmer que la somme f est continue.
Soit $[\alpha,\beta] \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \notin [\alpha,\beta]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$ et $f_n'(x) = \varepsilon a_n$ avec $|\varepsilon| = 1$.
Par convergence normale de la série des dérivées sur $[\alpha,\beta]$, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle ouvert $]a,b[$ vérifiant $\forall n\in\mathbb{N}, x_n\notin]a,b[$.
Soit $a\in\mathbb{R}$ tel qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ vérifiant $x_n = a$.
En considérant $A = \{n\in\mathbb{N}/x_n = a\}$, on peut écrire par absolue convergence

$$f(x) = \sum_{n\in A} a_n|x-a| + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A} a_n|x-x_n| = \alpha|x-a| + g(x)$$

avec $\alpha > 0$.
Puisque la série $\sum a_n$ converge, pour N assez grand, $\sum\limits_{k=N+1}^{+\infty} a_n \leqslant \frac{\alpha}{2}$.
On peut alors écrire

$$f(x) = \alpha|x-a| + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A, n\geqslant N+1} a_n|x-x_n| + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A, n\leqslant N} a_n|x-x_n|$$

La fonction $x\mapsto \sum\limits_{n\in\mathbb{N}\setminus A, n\leqslant N} a_n|x-x_n|$ est dérivable au voisinage de a.
Cependant, la fonction

$$\varphi : x\mapsto \alpha|x-a| + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A, n\geqslant N+1} a_n|x-x_n|$$

n'est quand à elle pas dérivable en a.
En effet, pour $h > 0$,

$$\frac{1}{h}\left(\varphi(a+h)-\varphi(a)\right) \geqslant \alpha - \frac{\alpha}{2} \geqslant \frac{\alpha}{2}$$

alors que pour $h < 0$,

$$\frac{1}{h}\left(\varphi(a+h)-\varphi(a)\right) \leqslant -\alpha + \frac{\alpha}{2} = -\frac{\alpha}{2}$$

Ainsi, les éventuels nombres dérivés à droite et à gauche ne peuvent pas coïncider.

Exercice 92 : [énoncé]
a) En vertu du théorème des accroissements finis

$$|u_n(x)| \leqslant x \sup_{[n,n+x]} |(\arctan)'| = \frac{x}{1+n^2}$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement et donc la fonction S est bien définie.

Les fonctions u_n sont continue et pour tout $a \in \mathbb{R}^+$,

$$\forall x \in [0, a], |u_n(x)| \leqslant \frac{a}{1+n^2}$$

On peut donc affirmer la convergence uniforme sur tout segment de la série $\sum u_n$ ce qui assure la continuité de S.
b) Montrons que S tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
Sachant

$$\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$$

on peut réécrire

$$S(x) = \arctan x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\arctan\frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{(n+x)}\right)$$

Les termes sommés étant tous positifs

$$S(x) \geqslant \arctan x + \sum_{n=1}^{N} \left(\arctan\frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{(n+x)}\right)$$

Or, quand $x \to +\infty$

$$\arctan x + \sum_{n=1}^{N} \left(\arctan\frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{(n+x)}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{N} \arctan\frac{1}{n}$$

Puisque la série $\sum \arctan\frac{1}{n}$ est une série à termes positifs divergente, pour $A \in \mathbb{R}$ quelconque, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=1}^{N} \arctan\frac{1}{n} \geqslant A$$

et alors, pour x assez grand

$$\arctan x + \sum_{n=1}^{N} \left(\arctan\frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{(n+x)}\right) \geqslant A$$

puis

$$S(x) \geqslant A$$